



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACRECIÓN DE FLUJOS RELATIVISTAS
HACIA AGUJEROS NEGROS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

FÍSICO

P R E S E N T A :

ELIU ANTONIO HUERTA ESCUDERO



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

TUTOR DE TESIS: DR. SERGIO MENDOZA RAMOS

2006

Índice general

Hoja de Datos del Jurado	1
Agradecimientos	3
Prefacio	7
Resumen	9
1. Acreción	11
§1.1. Historia	11
§1.2. El límite de Eddington	13
§1.3. Mecánica de fluidos	15
§1.4. Acreción esférica de Bondi	20
2. Modelo de acreción de Ulrich	25
§2.1. Introducción	25
§2.2. Cinemática del modelo	26
3. Acreción relativista	33
§3.1. Mecánica de fluidos relativista	33
§3.2. Ecuación de Bernoulli en presencia de campos gravitacionales intensos . . .	35
§3.3. El rol de la ecuación de Bernoulli en la astrofísica relativista	38
4. Acreción relativista con rotación	43
§4.1. Mecánica celeste en relatividad general	43
§4.2. Generalización del modelo de acreción de Ulrich	47
§4.3. Convergencia con modelos de acreción conocidos	51

§4.4. Un estudio detallado del modelo de acreción con rotación relativista	51
§4.5. Diferencias entre el modelo de Ulrich y su generalización relativista	53
§4.6. Modelo de acreción ultra-relativista	55
Conclusiones	61
Apéndice	63
§A. Solución de la ecuación de órbita	63
§B. Fundamentos de funciones elípticas de Jacobi	64
§C. Ecuación de Bernoulli en presencia de campos gravitacionales intensos	66
§D. Modelo de acreción relativista con rotación	68

Índice de figuras

2.1. Líneas de corriente para el modelo de Ulrich	30
2.2. Isocontornos de densidad	31
4.1. Variación de la densidad para distintos valores de α	55
4.2. Radio del ‘disco real’ vs. α	56
4.3. Evolución del disco	57
4.4. Comparación de líneas de corriente entre un potencial Paczyński - Wiita y el dado por relatividad general para un momento angular específico $h = 2r_g$	59
4.5. Comparación de líneas de corriente entre un potencial Paczyński–Wiita y el dado por relatividad general para un momento angular específico $h = 2r_g$. .	60

Hoja de Datos del Jurado

Huerta Escudero Eliu Antonio
Tel. 58666066
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Físico

Tutor
Dr. Sergio Mendoza Ramos

Sinodal 1
Dr. Eugenio Ley Koo

Sinodal 2
Dr. Xavier Hernández Doring

Sinodal 3
Dr. Carlos Arturo Vargas Guadarrama

Sinodal 4
Dr. Alejandro Raga Rasmussen

“Acreción de flujos relativistas hacia agujeros negros”
78 páginas
2006

Agradecimientos

Ser estudiante de la mejor Universidad de toda Iberoamérica es el más grande de los orgullos.

La UNAM, que me abrió sus puertas en la Escuela Nacional Preparatoria 5, me ha permitido tomar clases con las personas más capacitadas y comprometidas con su trabajo. Sus enseñanzas me han permitido desarrollarme como persona libre pensadora, alejada de cualquier tipo de enajenación. La Preparatoria me formó con un espíritu crítico, con disciplina. Además, en esta etapa conocí a mis mejores y más íntimos amigos.

Estudiar en la Facultad de Ciencias de la UNAM fue una experiencia inolvidable, particularmente desde el segundo semestre cuando conocí a dos de mis mejores profesores: Rafael Soto Montiel, con quien tomé “la clase de Mecánica”; y Arturo Vargas, con quien aprendí todas las Matemáticas que necesité a lo largo de la carrera. Nunca olvidaré las clases de Eugenio Ley Koo, su claridad y precisión dejaron una profunda impresión en mi formación académica.

El último tercio de la carrea fue sin duda el mejor de todos. Las excelentes clases de Relatividad de Miguel Alcubierre y de Álgebra Lineal II con Hugo Rincón fueron el prelude de un buen fin. Justo en el otoño de 2004 tomé el curso de Astrofísica Relativista con Sergio Mendoza. Este curso fue sin duda el más difícil de toda la licenciatura y, afortunadamente, el más fructífero. Recuerdo que a finales del curso Sergio me propuso hacer un trabajo de Tesis que consistía en generalizar el problema de acreción de Ulrich a un espacio-tiempo de Schwarzschild. Tal idea no me agradó del todo, en primer lugar porque la sección de acreción en su curso no me había parecido interesante y porque nunca había pensado hacer la Tesis en el IAUNAM. Un año después había resuelto el problema, el cual en el transcurso del tiempo se volvió realmente fascinante, y la Tesis estaba en sus últimas etapas. Este trabajo de Tesis fue una gran aventura, no solo porque tuve que aprender muchas cosas en el camino, desde el uso de LaTeX hasta funciones elípticas de Jacobi, sino porque pude ver los resultados de un trabajo intenso y continuo. Este entrenamiento será inolvidable.

Agradezco a Sergio todo el tiempo que generosamente me dedicó a lo largo de todo un año, inclusive los fines de semana. Más que un asesor de Tesis fue un amigo sincero que

señaló con firmeza mis errores y felicitó mis aciertos.

Sin duda este trabajo fue posible gracias al apoyo de mi familia, en particular de mis padres. A mi madre agradezco sus consejos que siempre me han resultado muy útiles en el vivir diario. Los buenos resultados obtenidos hasta ahora son debidos a la educación que ambos me dieron en la niñez. A mi padre agradezco particularmente que en la Secundaria me haya regalado el libro *Breve historia del tiempo*, y posteriormente, en el último año de la Preparatoria, *El significado de la Relatividad*, ambos libros me ayudaron a decidirme por estudiar Física. Sin duda, el apoyo más fuerte y constante en estos últimos años se lo debo a Jann, quien me brindó su mano y cariño en todo momento. Gracias Jann por compartir tu vida y tu tiempo conmigo, siempre te llevaré en mi corazón.

Por otro lado, agradezco el apoyo proporcionado por la biblioteca y el servicio de cómputo del Instituto de Astronomía–CU en la realización de esta Tesis de Licenciatura.

Particularmente al Dr. William Lee por proporcionarme sus resultados numéricos obtenidos con un potencial pseudo–newtoniano Paczyński–Wiita con el fin de compararlos con las soluciones analíticas obtenidas en este trabajo.

También agradezco los comentarios enriquecedores e innumerables correcciones realizadas en la primera versión de la Tesis a Sergio, y por supuesto a mis sinodales Eugenio Ley Koo, Xavier Hernández, Alex Raga y Arturo Vargas, además de William Lee, quienes con sus observaciones y comentarios dieron los toques finales a este trabajo.

Finalmente y no menos importante, agradezco el apoyo económico proporcionado por DGAPA–UNAM (IN119203).

*Con amor y cariño
a mis padres,
y a ti Jann,
el amor
de mi vida.*

Prefacio

Hace poco más de sesenta años, Sir Hermann Bondi comenzó a desarrollar ideas sobre la importancia del fenómeno de acreción que hoy en día resultan esenciales en el entendimiento de diversos problemas astrofísicos.

En una serie de artículos en colaboración con Lyttleton y Hoyle en los años cuarenta, Bondi dio pasos pioneros al desarrollar modelos de acreción en línea correspondientes a gas que se acreta hacia una estrella que se mueve a través de una nube de gas.

Finalmente en 1952 Bondi publicó su famoso artículo de acreción esférica sobre una estrella. En palabras de Bondi, este modelo fue construido por simple curiosidad matemática y no porque se le considerara como algo fundamental en la astrofísica (Bondi, 2005).

El modelo de acreción esférica de Bondi fue generalizado años más tarde por Michel (1972) para incluir efectos relativistas en el estudio de acreción esférica hacia un objeto compacto descrito por la métrica de Schwarzschild. Poco tiempo después Ulrich (1976) generalizó el modelo de acreción esférica de Bondi tomando en cuenta que el material tenía un momento angular pequeño y que giraba como un cuerpo rígido. Dada la complejidad del análisis, Ulrich se restringió a un estudio detallado bajo la suposición de movimiento balístico de partículas.

En la presente Tesis se construye un modelo matemático y totalmente analítico relativista del modelo de acreción de Ulrich, tomando en cuenta que el objeto central es compacto con un espacio-tiempo de Schwarzschild.

Tristemente el año pasado, el 10 de septiembre de 2005, Sir Hermann Bondi falleció. No obstante es la intención más profunda del Dr. Sergio Mendoza y de Eliu Huerta el dedicar el presente trabajo a su viva memoria y por haber concebido el fenómeno de acreción esférica. Con esto, Bondi inició una de las más grandiosas ideas en la astrofísica, a pesar de haber sido elucidada por mera curiosidad...

Resumen

Un disco de acreción consiste en un disco de gas que se encuentra alrededor de un gran número de objetos astrofísicos, desde estrellas jóvenes hasta agujeros negros. Tales discos existen debido a que el gas que cae sobre un objeto gravitante tiene momento angular que lo fuerza a orbitar alrededor de éste. Una vez en el disco, el gas cae hacia el centro del mismo, incrementando su temperatura conforme su energía potencial se convierte en térmica. Tal energía es radiada en infrarrojo, visible, ultravioleta e inclusive rayos X.

Discos de acreción alrededor de enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros en sistemas binarios pueden radiar cantidades masivas de energía en frecuencias del ultravioleta y rayos X; algunos de estos sistemas binarios se encuentran entre las fuentes de rayos X más luminosas del universo. De hecho, se cree que los discos de acreción desempeñan un papel crucial en el fenómeno de los núcleos activos de galaxias, los cuales se encuentran en el corazón de galaxias activas, incluyendo cuasares, galaxias Seyfert, blazares y radio galaxias, fuentes luminosas intensas altamente variables. Algunos cuasares varían su brillo en escalas de semanas o meses, mientras que algunos blazares muestran variaciones en emisión de rayos X en tiempos tan cortos como tres horas. Estas fluctuaciones imponen límites en el tamaño de la fuente luminosa, debido a que un objeto no puede variar su brillo más rápidamente que el tiempo que tarda la luz en viajar de una región emisora de radiación a otra. Además, observaciones del movimiento orbital de estrellas alrededor de núcleos activos muestran que una masa del orden de miles de millones de masas solares funge como maquinaria central. Esto lleva a concluir que dicha maquinaria es un agujero negro super masivo. Dado que el agujero negro no emite, se cree que la radiación emitida proviene de material que es calentado a millones de grados centígrados en un disco de acreción antes de ser tragado por el agujero o, en algunos casos, expulsado como chorros antiparalelos a lo largo del eje de rotación de la maquinaria central.

Esta Tesis fue realizada con el fin de obtener un modelo analítico de acreción para un espacio-tiempo tipo Schwarzschild que generalice el modelo de acreción de Ulrich (1976).

La Tesis discute con detalle el modelo de acreción esférica y estacionaria de Bondi (1952). Las ideas de Bondi constituyeron el fundamento para modelos posteriores de acre-

ción, tales como el modelo de Ulrich (1976), quien perturbó dicho modelo al asociar un momento angular inicial suficientemente pequeño a las partículas acretadas por objetos estelares. Tal modelo balístico se aplicó con éxito al estudio de estrellas T Tauri.

Por otro lado, Michel (1972) generalizó el modelo de acreción de Bondi considerando un espacio-tiempo de Schwarzschild.

Estos tres modelos, en particular el modelo de Bondi, son utilizados ampliamente para estimar tasas de acreción en sistemas con una amplia gama de escalas, desde acreción estelar hasta acreción en cúmulos de galaxias.

En esta Tesis se muestra que es posible deducir la física del modelo de Michel al construir la ley de Bernoulli en presencia de campos gravitacionales intensos y combinarla con la ley de conservación de número de partículas en su versión covariante.

En años recientes se han presentado distintos modelos que pretenden generalizar el modelo de acreción de Ulrich en un espacio-tiempo de Schwarzschild, pues tal modelo puede ser aplicado al estudio de destellos de rayos gama y procesos de acreción en objetos compactos. Sin embargo, tales modelos han sido incapaces de formular de manera exacta y analítica el campo de velocidades y de densidad de número de partículas del flujo de acreción. Beloborodov & Illarionov (2000) construyeron un modelo numérico que aproxima el potencial dado por relatividad general y que en el límite newtoniano no converge al modelo de Ulrich. Por otra parte, Lee & Ramírez-Ruiz (2006) consideraron un potencial de Paczyński-Witta para modelar el proceso de acreción.

En esta Tesis se resuelve de manera exacta y analítica el proceso de acreción de Ulrich en un espacio-tiempo de Schwarzschild tomando de manera perfecta el potencial de relatividad general. Se demuestra que en el límite newtoniano el modelo propuesto converge al modelo de Ulrich. Además, se presenta el modelo de acreción ultra-relativista, el cual muestra que el ‘disco de acreción’ se encuentra extendido sobre el plano ecuatorial y no concentrado en una región dada del espacio, tal como sucede en el modelo de Ulrich. Este modelo cubre fácilmente el modelo propuesto por Lee & Ramírez, mostrando además que en tal modelo las líneas de corriente tienen comportamientos significativamente distintos tanto a larga como a pequeña escala.

Capítulo 1

Acreción

§1.1. Historia

Para los físicos del siglo XIX, la gravedad era la única fuente de energía concebible para los cuerpos celestes. Sin embargo, al calcular el tiempo de vida del sol con base en tal suposición, se encontraba que tal fuente de energía no era suficiente para mantener al sol en actividad hasta ese momento. En contraste, a principios del siglo XX la gravedad volvió a tomar un papel preponderante para explicar a objetos muy luminosos, tales como supernovas, debido a que la fuente de energía nuclear de las estrellas resultaba inadecuada para explicar tales fenómenos. Hoy se sabe que la principal fuente de extracción de energía potencial gravitacional es mediante procesos de acreción, tal como sucede en distintos tipos de sistemas binarios cerrados. De hecho, es ampliamente aceptado que tal proceso es el suministro energético en núcleos activos de galaxias, microcuasares y colapsares.

El reconocimiento de la importancia de este proceso ha estado acompañado de un desarrollo sin precedentes de técnicas experimentales en astronomía, en particular al explotar las posibilidades del espectro electromagnético completo, desde los rayos γ hasta la radiación en radio. Al mismo tiempo, la existencia de objetos compactos ha quedado fuera de toda duda por el descubrimiento de pulsares, cuasares, microcuasares y destellos de rayos γ . Por lo tanto, el nuevo rol que desempeña la gravedad es debido a que la acreción sobre cuerpos compactos es una fuente natural y potente para la producción de radiación de altas energías.

Una estimación a orden de magnitud del proceso de acreción resulta iluminadora. Considérese un cuerpo de masa M y radio R_\star . La energía potencial gravitacional ΔE_{acc} liberada

al acretar una masa m sobre su superficie es

$$\Delta E_{\text{acc}} = \frac{GMm}{R_{\star}}, \quad (1.1)$$

donde G es la constante gravitacional de Newton. Si el cuerpo que acreta es una estrella de neutrones de radio $R_{\star} \sim 10$ km y masa $M \sim M_{\odot}$, entonces ΔE_{acc} tiene un valor aproximado de 10^{13} J por gramo acretado. Generalmente, en estas condiciones astrofísicas, ésta energía es liberada de manera muy eficiente como radiación electromagnética. A modo de comparación considérese la energía que puede ser extraída de una masa m por reacciones nucleares de fusión. La máxima energía extraída corresponde a la conversión de hidrógeno en helio, reacción que libera una energía

$$\Delta E_{\text{nuc}} = 0.007mc^2, \quad (1.2)$$

donde c es la velocidad de la luz. De aquí se sigue que la energía liberada es aproximadamente 6×10^{11} W, lo cual equivale a un vigésimo de la energía liberada para el caso de acreción[†].

La ecuación (1.1) indica que la eficiencia de la acreción como un mecanismo de liberación de energía depende fuertemente del cociente M/R_{\star} , entre más grande es éste, mayor es la eficiencia. Por lo tanto, al considerar acreción sobre objetos de unas cuantas masas solares, tanto las estrellas de neutrones ($R_{\star} \sim 10$ km) como los agujeros negros de radio típico $R_{\star} \sim 2GM/c^2 \sim 3(M/M_{\odot})$ ocupan el primer plano. En el caso de enanas blancas con $M \sim M_{\odot}$, $R_{\star} \sim 10^6$ km, los procesos nucleares son más eficientes que la acreción en factores del orden 25–50. Sin embargo no debe concluirse que la acreción carece de importancia para las observaciones ya que la luminosidad en la mayor parte de la vida de la estrella depende exclusivamente del proceso de acreción. Esto se debe a que los procesos nucleares ocurren en la superficie de la estrella dando lugar a eventos excesivamente luminosos de corta duración en los cuales el combustible nuclear es consumido rápidamente. Los sistemas binarios en los que una enana blanca acreta de una estrella compañera cercana se denominan variables cataclísmicas y son bastante comunes en nuestra galaxia.

[†] Una manera elegante de obtener la energía liberada por acreción en términos de la energía en reposo $E_{\text{reposito}} = mc^2$ es la siguiente: al llegar a R_{\star} las partículas alcanzan una velocidad de equilibrio $v^2 = GM/R_{\star}$. Si el sistema está virializado, i.e. $2T + W = 0$, entonces la energía total $E = T + W = W/2$. Por lo tanto, la energía liberada en el proceso de acreción con base en las consideraciones anteriores está dada por $\Delta E_{\text{acc}}/E_{\text{reposito}} = v^2/2c^2$. Para un objeto compacto las partículas alcanzan velocidades relativistas al ser acretadas, i.e. $\Delta E_{\text{acc}} \rightarrow E_{\text{reposito}}/2$.

Estos sistemas son muy importantes, ya que proporcionan una excelente oportunidad de estudiar procesos de acreción aislados, dado que otras fuentes de luminosidad, en particular la estrella compañera, pueden ser despreciadas.

Por otro lado, para un valor dado de compacidad M/R_* , la luminosidad del sistema acretante depende de la tasa de acreción \dot{M} . Para altas luminosidades, la tasa de acreción puede ser controlada por el momento externo transferido de la radiación hacia el material que es acretado mediante procesos de dispersión y absorción. Bajo ciertas circunstancias, esto puede conducir a la existencia de un máximo de luminosidad para una masa dada, el cual es conocido como la luminosidad de Eddington.

§1.2. El límite de Eddington

El límite obtenido por Eddington es aplicable como una estimación para un proceso de acreción esféricamente simétrico y estacionario, en el que el material acretado es principalmente hidrógeno totalmente ionizado. Bajo estas suposiciones, la radiación ejerce una fuerza principalmente sobre los electrones libres a través de la dispersión de Thompson[†]. Por otro lado, la fuerza electrostática atractiva de Coulomb es tal que los electrones arrastran protones conforme se mueven. De hecho, la radiación empuja pares electrón–protón en contra de la fuerza gravitacional total que actúa sobre cada par a una distancia radial r medida desde el centro de la estrella. Cuando las fuerzas de radiación y gravitacional están en equilibrio, se dice que se alcanza el límite de Eddington de luminosidad L_{Edd} , el cual está dado por (Frank et al., 2002)

$$L_{\text{Edd}} \cong 1.3 \times 10^{31} (M/M_{\odot}) W, \quad (1.3)$$

donde M es la masa de la estrella sobre la que se acreta material. A luminosidades mayores que ésta, la presión de radiación (hacia afuera) excedería la atracción gravitacional (hacia adentro) y el proceso de acreción se detendría. Para una geometría más complicada, la ecuación (1.3) no es más que una estimación burda del verdadero valor de la luminosidad. Aún más relevante es la hipótesis de proceso estacionario. Una ilustración clara de este hecho tiene que ver con las supernovas, en las cuales los valores de luminosidad son mayores al límite de Eddington por órdenes de magnitud. Otra de las hipótesis principales fue

[†] La sección recta para los protones es un factor 10^{-8} menor a la sección recta de Thompson, razón por la cual la radiación actúa principalmente sobre electrones.

que el material acretado es hidrógeno totalmente ionizado. La primera suposición es una aproximación adecuada en la mayoría de los casos. La suposición de ionización completa es válida cuando el objeto que acreta emite principalmente en rayos X, ya que una pequeña fracción de luminosidad en rayos X permite que los iones abundantes estén completamente separados de sus electrones. A pesar de las limitaciones señaladas, el límite de Eddington tiene una gran importancia práctica, en particular porque ciertos tipos de sistemas se comportan como *velas estándar* en el sentido de que sus luminosidades son muy cercanas a las predichas por L_{Edd} .

El límite de Eddington impone una cota en la tasa de acreción estacionaria \dot{M} . Si toda la energía cinética de la materia acretada es cedida en forma de radiación en la superficie estelar al radio R_* , entonces la *luminosidad de acreción* está dada por

$$L_{\text{acc}} = \frac{GM\dot{M}}{R_*} = 1.3 \times 10^{29} \left(\frac{\dot{M}}{10^{13} \text{ kgs}^{-1}} \right) \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{10 \text{ km}}{R_*} \right) \text{ W.} \quad (1.4)$$

Los cocientes M/M_{\odot} , $10^4 \text{ km}/R_*$ y M/M_{\odot} , $10 \text{ km}/R_*$ son de orden uno para enanas blancas y estrellas de neutrones, respectivamente. Como $10^{13} \text{ kg s}^{-1}$ es una tasa de acreción típica en sistemas binarios cerrados que involucran este tipo de estrellas, entonces las luminosidades correspondientes son 10^{26} W y 10^{29} W . Por otro lado, si las suposiciones hechas para derivar el límite de Eddington son válidas, las luminosidades a observar, con base en la ecuación (1.3), deben ser menores a 10^{14} W y 10^{11} W en ambos tipos de sistema (Frank et al., 2002).

Para el caso de acreción sobre agujeros negros, la ecuación (1.4) sigue siendo válida. Como el radio expresado en esta ecuación ya no se refiere a una superficie dura sino a una región en la cual la materia puede caer, más no escapar, entonces mucha de la energía que cae sobre el agujero solo aumenta su masa en lugar de ser radiada. Es importante hacer notar que a pesar de su gran compacidad, un agujero negro de una masa solar es menos eficiente en la conversión de energía potencial gravitacional en radiación que una estrella de neutrones de la misma masa (Frank et al., 2002).

Por último, el límite de Eddington también puede ser aplicado en núcleos activos de galaxias, objetos que tienen luminosidades muy altas $\geq 10^{40} \text{ J s}^{-1}$, las cuales varían por factores de orden dos en escalas de tiempo de semanas o menos. Si se supone que estos sistemas radían al menos con L_{Edd} , entonces la maquinaria central debe ser del orden de $10^9 M_{\odot}$, por lo que los agujeros negros supermasivos son los únicos candidatos plausibles

como objetos acretantes en tales sistemas.

Este somero análisis del límite de Eddington indica que, al menos para tasas de acreción muy grandes, existen fuerzas adicionales a la gravedad que pueden ser importantes. De hecho, en muchos de los sistemas físicos reales, la materia que es acretada posee un considerable momento angular por unidad de masa, el cual debe perderse mediante algún mecanismo si la materia ha de ser acretada.

Con el fin de estudiar los procesos de acreción de manera cuantitativa es necesario emplear una herramienta básica: la *Mecánica de Fluidos*, la cual ocupa el siguiente apartado.

§1.3. Mecánica de fluidos

La *Mecánica de Fluidos* es la rama de la Física que se dedica al estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases). Los fenómenos estudiados son macroscópicos, por lo que un fluido es considerado como un medio continuo. Esto significa que cualquier elemento de fluido contiene una gran cantidad de partículas. Razón por la cual un elemento infinitesimal de fluido significa físicamente una sección de fluido mucho más pequeña que la dimensión característica del fluido en cuestión.

La descripción matemática del estado de un fluido en movimiento es mediante funciones que proporcionan la distribución de la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ y dos cualesquiera cantidades termodinámicas pertenecientes al fluido, tales como la presión p y la densidad ρ . Todas las cantidades termodinámicas quedan completamente determinadas al conocer el valor de dos cualesquiera de ellas, junto con la ecuación de estado. Por lo tanto si se conocen cinco cantidades, por ejemplo las tres componentes de la velocidad \mathbf{v} , así como la presión p y la densidad ρ , el estado del fluido en movimiento está totalmente determinado.

La velocidad $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ del fluido en un punto (x, y, z) a un tiempo t se refiere a puntos que están fijos en el espacio y no a partículas específicas del fluido que se mueven en el tiempo. Esta observación es también aplicable para la densidad y la presión.

Una de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos es la *ecuación de continuidad*, la cual describe la conservación de la materia o masa.

Esta ecuación se obtiene de la siguiente manera. Considérese un volumen fijo V_0 del espacio. La masa contenida en este volumen es $\int \rho dV$, donde la integral se toma a lo largo del volumen V_0 . La masa de fluido que atraviesa por unidad de tiempo el elemento de área $d\mathbf{a}$ es $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$. Como el elemento de área $d\mathbf{a}$ apunta hacia afuera de la superficie, entonces la cantidad $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}$ es positiva si el fluido sale de la superficie y negativo, en caso contrario.

Por lo tanto, la masa total de fluido que fluye hacia afuera del volumen V_0 por unidad de tiempo es

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}. \quad (1.5)$$

Esta integral se toma sobre una superficie cerrada que encierra al volumen en cuestión. Por otro lado, el decremento en masa del fluido por unidad de tiempo en el volumen V_0 es

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV. \quad (1.6)$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores y reescribiendo la integral de superficie a una de volumen mediante el teorema de la divergencia se tiene que

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0. \quad (1.7)$$

Como esta ecuación es válida para cualquier volumen, entonces el integrando tiene que ser nulo, i.e.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.8)$$

El vector $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ se denomina *densidad de flujo de masa* y mide la cantidad de masa que fluye por unidad de área ortogonal al vector velocidad por unidad de tiempo en dirección del mismo. Esta ecuación implica más que simplemente la conservación de la masa. Dado que está escrita en términos de una ecuación diferencial parcial, esto implica que la velocidad es continua, razón por la que es usualmente conocida como ecuación de continuidad.

Otra ecuación fundamental es la *Ecuación de Euler*, la cual está basada en el principio de Pascal: “la presión que se ejerce sobre una porción de fluido es la misma en todas direcciones y es perpendicular a la superficie sobre la cual actúa”. Por tanto, la fuerza total que actúa sobre un volumen de fluido está dada por

$$-\oint p d\mathbf{a}, \quad (1.9)$$

la integral se toma sobre la superficie que encierra al volumen en cuestión. Al transformar esta integral en una de volumen se obtiene

$$-\oint p d\mathbf{a} = -\int \nabla p dV. \quad (1.10)$$

La ecuación de movimiento del fluido se obtiene al igualar la fuerza $-\nabla p$ que actúa sobre cada elemento de volumen del fluido con la que actúa sobre éste mismo de acuerdo a la segunda ley de Newton, i.e.

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p. \quad (1.11)$$

La derivada $d\mathbf{v}/dt$ es la derivada material total o sustancial, la cual representa la tasa de cambio de la velocidad de una partícula arbitraria de fluido conforme se mueve en el espacio. Esta derivada debe ser expresada en términos de cantidades referidas a puntos fijos en el espacio. Esto se logra al reconocer que el cambio $d\mathbf{v}$ en la velocidad de una partícula dada de fluido en el tiempo dt está compuesta de dos partes: (a) el cambio en la velocidad en un tiempo dt en una posición fija $(\partial\mathbf{v}/\partial t)dt$ y (b) la diferencia entre las velocidades (al mismo tiempo) de dos puntos separados una distancia $d\mathbf{r}$, donde $d\mathbf{r}$ es la distancia recorrida por la partícula en cuestión en un tiempo dt , i.e. $(d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}$. En resumen, la diferencial de velocidad está dada por

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v},$$

dividiendo esta relación por dt se obtiene la derivada material de la velocidad

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \quad (1.12)$$

sustituyendo (1.12) en (1.11) se obtiene la ecuación de movimiento del fluido, la cual fue deducida por Leonard Euler en 1775,

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}. \quad (1.13)$$

Adicionalmente, si cualquier fuerza \mathbf{f} que actúa sobre el fluido, además de las fuerzas internas, es conservativa, tal como la gravedad, entonces ésta puede ser escrita en términos del gradiente de una función escalar ϕ de tal forma que

$$\mathbf{f} = -\nabla\phi.$$

Con esta consideración, la ecuación (1.13) toma la forma

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\phi. \quad (1.14)$$

Al deducir esta ecuación, no se consideraron procesos de disipación de energía, debidos a la fricción entre las distintas partículas del fluido durante su movimiento (viscosidad), o bien debidos a la transferencia de calor entre las distintas partes del fluido (conductividad térmica). Este tipo de fluidos, en los cuales la viscosidad y la conductividad térmica son despreciados, se denominan ideales.

En un movimiento adiabático la entropía de la partícula permanece constante conforme ésta se mueve en el espacio. Si s es la entropía por unidad de masa, entonces la condición de movimiento adiabático está dada por

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s = 0. \quad (1.15)$$

Un fluido cuya entropía permanece constante en cualquier punto del mismo se denomina isentrópico.

Por otro lado, un fluido estacionario es aquél en el que el campo de velocidades no depende explícitamente del tiempo, es decir, $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$. De aquí se sigue que un fluido estacionario es aquél que satisface $\partial / \partial t = 0$ (Landau & Lifshitz, 1995).

En lo subsecuente se utilizará el concepto de líneas de corriente. Estas líneas son tales que sus tangentes son paralelas al campo de velocidad en todo punto y, por tanto, están determinado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \quad (1.16)$$

en donde v_x , v_y y v_z representan las componentes x , y , z de la velocidad de las partículas, respectivamente. En un flujo estacionario, las líneas de corriente no varían con el tiempo y coinciden con las trayectorias de las partículas. En un flujo no-estacionario, el vector velocidad cambia tanto su magnitud como su dirección en un punto dado con el tiempo, por lo que resulta útil considerar únicamente las líneas de corrientes instantáneas en este caso.

Por otra parte, usando la identidad

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \wedge \nabla \wedge \mathbf{v},$$

la ecuación (1.14) toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \wedge \nabla \wedge \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi. \quad (1.17)$$

Por otro lado, la segunda ley de la Termodinámica está dada por

$$d\varepsilon = Tds - pd \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (1.18)$$

donde ε es la energía interna específica (i.e. energía interna por unidad de masa), s es la entropía específica, $1/\rho$ es el volumen específico, T es la temperatura y p es la presión del sistema en consideración.

La ecuación (1.18) puede escribirse como

$$d\omega = Tds + \left(\frac{1}{\rho} \right) dp, \quad (1.19)$$

donde $\omega = \varepsilon + p/\rho$ es la *entalpía* por unidad de masa del sistema.

Considérese ahora que el fluido es adiabático, entonces con base en la ecuación (1.19), la relación (1.17) toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \wedge \nabla \wedge \mathbf{v} = -\nabla \omega - \nabla \phi. \quad (1.20)$$

Al tomar el producto escalar entre la ecuación (1.20) y el vector \mathbf{v} se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}^2 = -\mathbf{v} \cdot \nabla (\omega + \phi). \quad (1.21)$$

Suponiendo ahora que el flujo es estacionario, la ecuación (1.21) puede ser escrita como

$$-\mathbf{v} \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \omega + \phi \right\} = 0. \quad (1.22)$$

Como $\mathbf{v} \cdot \nabla$ es la derivada en la dirección \mathbf{v} , la cantidad

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \omega + \phi = \text{const.} \quad (1.23)$$

La constante que aparece en el lado derecho de la ecuación toma distintos valores para cada línea de corriente.

Adicionalmente, como el flujo es adiabático se tiene que $\omega = \int dp/\rho$. De esta relación se sigue que la ecuación (1.23) toma la forma

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \phi = \text{const.} \quad (1.24)$$

Este importante resultado fue obtenido primeramente por Daniel Bernoulli en 1738 para un fluido incompresible, razón por la cual recibe el nombre de *Ecuación de Bernoulli* o *Ley de Bernoulli*. Debe ser claro que esta ecuación es válida únicamente para un flujo estacionario en el que los procesos de disipación de energía son despreciados y en el cual sólo actúan fuerzas conservativas.

§1.4. Acreción esférica de Bondi

Considérese una estrella de masa M que acreta con simetría esférica de una enorme nube de gas. Esta sería una buena aproximación para el caso de una estrella recién formada que acreta gas de su nube progenitora, siempre y cuando el momento angular, el campo de fuerza magnético y el movimiento de bulto del gas interestelar puedan ser despreciados con respecto a los valores correspondientes de la estrella.

El problema de acreción de gas por una estrella en movimiento relativo con respecto a una nube de gas fue considerado primeramente por Hoyle y Lyttleton (1939) y posteriormente por Bondi y Hoyle (1944) (Edgar, 2004). El caso presentado a continuación fue resuelto por Bondi (1952) y corresponde al de una estrella que acreta gas permaneciendo en reposo dentro de la nube de gas.

Este modelo predice la tasa de acreción estacionaria \dot{M} sobre la estrella considerada dadas las condiciones de densidad ρ_∞ y temperatura T_∞ en regiones del gas alejadas de la estrella, así como condiciones de frontera en su superficie. Para tratar el problema matemáticamente se escogen coordenadas esféricas (r, θ, φ) con el origen en el centro de la estrella. Las cantidades físicas del fluido son independientes de las variables angulares θ, φ debido a la simetría del problema. La estrella se considera como una masa puntual pues su radio es mucho menor al radio de la nube esférica de gas. La velocidad tiene solamente la componente radial $v_r = v$. El signo de ésta se toma negativo para considerar material acretado y no un viento estelar. Para un flujo estacionario la ecuación de continuidad (1.8) toma la forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v) = 0, \quad (1.25)$$

y por tanto $r^2 \rho v = \text{const.}$ Como $\rho(-v)$ es el flujo de materia acretado, entonces la constante

obtenida debe estar relacionada con la tasa de acreción \dot{M} . De hecho, como $\dot{M} = \int r^2 \rho v da$ con da el elemento de área, se sigue que por la simetría del modelo

$$4\pi r^2 \rho |v| = \dot{M}. \quad (1.26)$$

Como $r^2 \rho v = \text{const.}$, entonces $\dot{M} = 4\pi r^2 \rho |v|$ también es constante.

La componente radial de la ecuación de Euler (1.17) toma la forma

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (1.27)$$

Si el gas obedece una ecuación politrópica dada por

$$p \propto \rho^\kappa, \quad (1.28)$$

entonces es posible tratar de manera aproximada los casos de acreción isotérmica ($\kappa = 1$) y adiabática ($\kappa = 5/3$) simultáneamente. Por ejemplo, la aproximación adiabática es válida cuando las escalas de tiempo para el calentamiento y enfriamiento significativo del gas son largas comparadas con el tiempo empleado por un elemento de gas en caer a la estrella. En realidad, ninguna de las aproximaciones es absolutamente satisfecha, por lo que el estudio es válido cuando $1 < \kappa < 5/3$.

Para obtener información sin necesidad de hacer un tratamiento matemático sofisticado, nótese que

$$\frac{dp}{dr} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{dr} = c_s^2 \frac{d\rho}{dr}$$

donde c_s representa la velocidad adiabática del sonido. Al sustituir esta relación y (1.25) en (1.27) se obtiene

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) \frac{d}{dr}(v^2) = -\frac{GM}{r^2} \left[1 - \frac{2c_s^2 r}{GM} \right]. \quad (1.29)$$

Suficientemente lejos de la estrella, el factor $[1 - 2c_s^2 r/GM]$ debe ser negativo, ya que c_s^2 se aproxima a un valor asintótico $c_{s\infty}^2$, el cual está relacionado con el valor de la temperatura lejos de la estrella, a medida que r crece sin límite. Esto implica que para r suficientemente grande el lado derecho de (1.29) debe ser positivo. En el lado izquierdo, el factor dv^2/dr debe ser negativo, pues se desea que el gas que está en reposo lejos de la estrella se acelere cuando se aproxime a ésta. Estas dos condiciones son compatibles únicamente si para r

suficientemente grande el flujo es subsónico, i.e.

$$v^2 < c_s^2. \quad (1.30)$$

Este resultado es por demás razonable ya que el gas no tiene temperatura cero, por lo que la velocidad del sonido lejos de la estrella tampoco es nulo. Conforme el gas se aproxima a la estrella, el factor $[1 - 2c_s^2 r/GM]$ tiende a crecer. Eventualmente es cero, a menos que exista una manera de incrementar c_s^2 calentando el gas. Esto es muy improbable, ya que este factor se anula a un radio

$$r_s = \frac{GM}{2c_s^2(r_s)} \cong 7.5 \times 10^{10} \left(\frac{T(r_s)}{10^4 \text{K}} \right)^{-1} \frac{M}{M_\odot} \text{ km}. \quad (1.31)$$

Para valores típicos de M y T , el orden de magnitud de $r_s \cong 7.5 \times 10^{10}$ km es mucho mayor que el radio R_\star de cualquier objeto estelar ($R_\star \leq 10^6$ km) por lo que se necesitarían temperaturas excesivamente elevadas para que $r_s \leq R_\star$, temperaturas que podrían alcanzarse en una onda de choque estacionaria cercana a la superficie estelar.

Es posible hacer otro análisis de los signos en la ecuación (1.29) para $r < r_s$, obteniéndose que el flujo debe ser supersónico cerca de la estrella, i.e.

$$v^2 > c_s^2. \quad (1.32)$$

Esta ecuación funge también como una condición de frontera en la superficie de la estrella, la cual es necesaria para especificar el problema correctamente.

Por otro lado, la existencia del punto r_s que satisface la ecuación (1.31) es de gran utilidad para caracterizar el flujo de acreción. La consecuencia matemática directa es que en $r = r_s$ el lado izquierdo de (1.29) debe anularse, i.e.

$$v^2 = c_s^2, \quad \text{o} \quad \frac{d}{dr}(v^2) = 0, \quad (1.33)$$

Todas las soluciones de (1.29) pueden clasificarse por su comportamiento en r_s dado por (1.33), además del comportamiento exhibido para r suficientemente grande.

De todas las posibles soluciones, la que satisface las condiciones requeridas es (Frank et al., 2002)

$$v^2(r_s) = c_s^2(r_s), \quad v^2 \rightarrow 0 \text{ conforme } r \rightarrow \infty \quad (v^2 < c_s^2, r > r_s; v^2 < c_s^2, r < r_s).$$

La condición (1.33) del punto sónico permite relacionar la tasa de acreción \dot{M} con las condiciones a infinito. La manera de lograrlo es tomando la ecuación de Bernoulli (1.24) para un gas politrópico (cf. ecuación (1.28)), lo que conduce a la ecuación

$$\frac{v^2}{2} + \frac{K\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} - \frac{GM}{r} = \text{const.} = \frac{c_{s\infty}^2}{\kappa-1}.$$

Como las ecuaciones (1.31) y (1.33) implican que $v^2(r_s) = c_s^2(r_s)$ y $GM/r_s = 2c_s^2(r_s)$, la ecuación de Bernoulli toma la forma

$$c_s(r_s) = c_s \left[\frac{2}{5-3\kappa} \right]^{1/2}. \quad (1.34)$$

La tasa de acreción \dot{M} se obtiene de la ecuación (1.26) y por tanto

$$\dot{M} = 4\pi r^2(-v) = 4\pi r_s^2 \rho(r_s) c_s(s). \quad (1.35)$$

Empleando la relación $c_s^2 \propto \rho^{\kappa-1}$ y sustituyendo la ecuación (1.34) en (1.35) se obtiene el valor de la acreción en términos de las condiciones en infinito

$$\dot{M} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho_\infty}{c_{s\infty}^3} \left[\frac{2}{5-3\kappa} \right]^{(5-3\kappa)/2(\kappa-1)}. \quad (1.36)$$

Esta ecuación indica que es muy poco probable observar acreción del medio interestelar, pues al tomar valores típicos de $c_{s\infty} = 10 \text{ km s}^{-1}$, $\rho_\infty = 10^{27} \text{ Kg m}^{-3}$, lo que equivale a una temperatura aproximada de 10 K y un número de densidad cercano a una partícula por centímetro cúbico, la luminosidad obtenida, aún en el caso extremo de acreción sobre una estrella de neutrones, es $L_{\text{acc}} \sim 10^{24} \text{ W}$. A una distancia típica de 1 kpc esto corresponde a un flujo demasiado débil para ser detectado.

El modelo de acreción esférica de Bondi muestra que la tasa de acreción estacionaria \dot{M} está determinada por condiciones de ambiente en infinito (1.36) y por una condición de frontera o superficie dada por la ecuación (1.32). Además, la acreción del medio interestelar por estrellas aisladas arroja un valor \dot{M} muy pequeño para tener alguna relevancia observacional. Por otro lado, un flujo de acreción estacionario con \dot{M} mayor o igual al obtenido

en la ecuación (1.36) debe tener un punto sónico, i.e. la velocidad del material acretado debe alcanzar un valor supersónico cerca de la superficie estelar.

Capítulo 2

Modelo de acreción de Ulrich

§2.1. Introducción

Ulrich (1976) modificó el modelo de acreción axisimétrico de Bondi (1952) al considerar una nube que posee un pequeño momento angular. La nube rota alrededor de un eje sobre el cual se encuentra la estrella central. En este modelo, las variables que describen el proceso de acreción tienen simetría cilíndrica, i.e. no dependen explícitamente del ángulo azimutal φ (Ulrich, 1976).

El modelo consiste en considerar una estrella o cualquier otro objeto central de masa M , la cual está embebida en una nube de gas de extensión infinita. Lejos de la estrella, la presión p_∞ , la densidad ρ_∞ , y la velocidad del sonido $c_{s\infty}$ tienen valores uniformemente constantes. La nube rota alrededor del eje z como un cuerpo rígido de tal manera que su momento angular específico h tiene un valor h_∞ suficientemente lejos del eje. El proceso de acreción es estacionario y suficientemente lento de manera tal que la masa M puede considerarse constante. Adicionalmente, se supone que el flujo ha alcanzado un estado estacionario y obedece la relación politrópica (cf. ecuación (1.28))

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\kappa, \quad (2.1)$$

donde p y ρ representan la presión y la densidad del gas respectivamente, y κ es el índice politrópico.

Como se mostró en la sección §1.4, la tasa de acreción \dot{M} en el modelo de Bondi es constante. Esto se debe a que la masa del objeto central es mucho mayor que la masa

contenida en una esfera de radio r , donde r es la distancia del centro de la estrella a una partícula arbitraria del fluido. De esta manera la autogravedad del gas puede ser despreciada con respecto a la gravedad del objeto central.

Este modelo está caracterizado por los siguientes parámetros: la constante gravitacional G , el radio del objeto central r_0 , y las constantes h_∞ , M , ρ_∞ , p_∞ , $c_{s\infty}$ y κ . A partir de éstos, se pueden construir las siguientes cantidades adimensionales (Mendoza et al., 2004):

$$\delta = \frac{r_0 c_{s\infty}^2}{GM}, \quad \epsilon = \left(\frac{h_\infty c_{s\infty}}{GM} \right)^2, \quad \frac{p_\infty}{\rho_\infty c_{s\infty}^2} \sim 1. \quad (2.2)$$

En el modelo de Bondi, $r_c = GM/c_s^2$ corresponde aproximadamente a la distancia en la que las partículas del fluido alcanzan la velocidad del sonido. Esto implica que si $\delta \ll 1$ el radio del objeto central es pequeño con respecto a esta distancia.

Por otro lado, ϵ es aproximadamente el cociente entre la fuerza gravitacional y la centrífuga de una partícula de fluido evaluado en la posición r_c . Debido a que el momento angular del flujo de acreción debe conservarse, entonces debe cumplirse que a partir de cierto momento la fuerza centrífuga $\sim h^2/r^3$ se equilibre con la fuerza gravitacional GM/r^2 . Este equilibrio se alcanza en el punto $r_d = \epsilon r_c$, en el cual un disco de radio r_d se forma en el plano ecuatorial.

§2.2. Cinemática del modelo

Considérese una partícula con ángulo polar inicial θ_0 y cuya velocidad angular alrededor del eje de rotación es $\dot{\varphi}_0$. Como los gradientes de presión y las variaciones en energía interna a lo largo de las líneas de corriente del flujo de acreción dentro de la esfera de radio r_c tienen una influencia despreciable en las ecuaciones de energía y momento, las líneas de corriente pueden tomarse como balísticas. Inclusive, si la masa del disco m_d es pequeña comparada con la del objeto central entonces la trayectoria de una partícula de fluido puede ser modelada con un potencial central newtoniano.

La diferencia entre la energía total y la cinética más la potencial de un elemento de fluido es pequeña cerca el disco de acreción. Esto es cierto para valores pequeños de energía cinética de rotación y cuando el calentamiento debido a procesos de radiación es despreciable. De esta manera las trayectorias de las partículas cerca del disco son parabólicas, i.e.

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} \approx 0, \quad (2.3)$$

donde E es la energía por unidad de masa de un elemento de fluido cerca del disco. Cuando las partículas llegan al plano $\theta = \pi/2$, i.e. al plano ecuatorial, éstas empiezan a mezclarse con el disco, razón por la cual sólo se consideran las líneas de corriente aguas arriba del disco.

Sea α el ángulo medido respecto al núcleo estelar entre la posición inicial de la partícula y su posición en r . La ecuación que relaciona a r con α está dada por (Landau & Lifshitz, 1994b)

$$r = \frac{p}{1 - \cos \alpha}, \quad \text{con} \quad p = \frac{h^2}{GM}, \quad (2.4)$$

donde p representa el *latus rectum* de la parábola.

Como el momento angular h perpendicular al plano de la órbita está relacionado con el momento angular de la partícula en infinito h_∞ mediante la relación

$$h = h_\infty \sin \theta_0, \quad (2.5)$$

entonces el *latus rectum* de la órbita cumple que

$$p = \frac{h_\infty^2}{GM} \sin^2 \theta_0 = r_d \sin^2 \theta_0. \quad (2.6)$$

Por otro lado, la geometría del modelo permite relacionar el ángulo α con los ángulos polares θ y θ_0 mediante la identidad

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \cos \alpha. \quad (2.7)$$

Esta relación permite encontrar la ecuación de las órbitas de las partículas, así como el campo de velocidades y la densidad del flujo de acreción. Estas ecuaciones pueden escribirse en términos de cantidades adimensionales mediante las siguientes relaciones

$$\frac{r}{r_d} \rightarrow r, \quad \frac{v_i}{v_k} \rightarrow v_i \quad (i = r, \theta, \varphi), \quad \frac{\rho}{\rho_0} \rightarrow \rho, \quad (2.8)$$

donde la velocidad natural v_k^\dagger y la densidad ρ_0 están definidas por

[†] Esta velocidad corresponde a la de una partícula que rota alrededor de un eje describiendo una tra-

$$\rho_0 := \frac{\dot{M}}{4\pi v_k r_d^2}, \quad v_k := \left(\frac{M}{r_d}\right)^{1/2}.$$

Las soluciones analíticas para las líneas de corriente, el campo de velocidad v_i ($i = r, \theta, \varphi$) y la densidad ρ para un flujo de acreción con rotación están dadas por (Mendoza et al., 2004)

$$r = \frac{\sin^2 \theta_0}{1 - \cos \theta / \cos \theta_0}, \quad (2.9)$$

$$v_r = -r^{-1/2} \left(1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}\right)^{1/2}, \quad (2.10)$$

$$v_\theta = r^{-1/2} \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin \theta} \left(1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}\right)^{1/2}, \quad (2.11)$$

$$v_\varphi = r^{-1/2} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}\right)^{1/2}, \quad (2.12)$$

$$\rho = r^{-3/2} \left(1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}\right)^{-1/2} \{1 + 2r^{-1} P_2(\cos \theta_0)\}^{-1}. \quad (2.13)$$

En esta última relación, la cantidad $P_2(\chi)$ representa al polinomio de Legendre de segundo orden dado por

$$P_2(\chi) = (3 \cos^2 \chi - 1)/2.$$

El ángulo θ_0 es una etiqueta para cada una de las líneas de corriente. De hecho, para cada θ_0 hay una sola línea de corriente debido a que éstas no se intersectan. La Figura 2.1 muestra una proyección de las líneas de corriente para $\varphi = \text{const}$. Adicionalmente, cuando $\theta_0 \rightarrow 0$, las componentes polar y azimutal de la velocidad se anulan, lo cual implica que las líneas de corriente son paralelas al eje de rotación.

En cualquier punto (r, θ) , la ecuación (2.9) debe ser resuelta para θ_0 . Solo entonces podrá encontrarse el campo de velocidades y la densidad a partir de las ecuaciones (2.9)–(2.13). Como se mencionó anteriormente, las únicas soluciones a considerar corresponden

vectoria circular de radio r_d bajo la influencia de un campo central newtoniano.

a las líneas de corriente aguas arriba del disco, i.e. cuando $\sin \theta$ y $\sin \theta_0$ tienen el mismo signo. Adicionalmente, la ecuación (2.9) puede reescribirse como

$$\cos^3 \theta_0 + \cos \theta_0(r - 1) - r \cos \theta = 0, \quad (2.14)$$

cuya solución es (cf. Apéndice A)

$$\cos \theta_0 = \begin{cases} (\cos \theta)^{1/3}, & \text{si } r = 1, \\ 2 \left(\frac{r-1}{3}\right)^{1/2} \sinh \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{r \cos \theta}{2 \left(\frac{1-r}{3}\right)^{3/2}} \right) \right\}, & \text{si } r > 1, \\ 2 \left(\frac{r-1}{3}\right)^{1/2} \cosh \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{arccosh} \left(\frac{r \cos \theta}{2 \left(\frac{1-r}{3}\right)^{3/2}} \right) \right\}, & \text{si } r < 1 \text{ y } \left(\frac{r \cos \theta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-r}{3}\right)^3 > 0, \\ 2 \left(\frac{r-1}{3}\right)^{1/2} \cos \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{acos} \left(\frac{r \cos \theta}{2 \left(\frac{1-r}{3}\right)^{3/2}} \right) \right\}, & \text{si } r < 1 \text{ y } \left(\frac{r \cos \theta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-r}{3}\right)^3 < 0. \end{cases}$$

Este conjunto de soluciones junto con las ecuaciones (2.9)–(2.13) dan la solución completa del campo de velocidades y la densidad como funciones del ángulo polar θ y la coordenada radial r .

Por otro lado, la relación (2.14) puede reescribirse como

$$\cos \theta_0 \Big|_{\theta=\pi/2} = \Theta(1-r)(1-r)^{1/2}, \quad (2.15)$$

$$\cos \theta_0 = 1 - \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{r}{r+2} \right), \text{ si } r \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

donde $\Theta(\chi)$ es la función escalón de Heaviside cuyo valor es 1 si $\chi > 0$ y es nula si $\chi < 0$. Al sustituir las dos relaciones anteriores en (2.13) se tiene que

$$\rho(\theta = \pi/2) = \begin{cases} \frac{1}{2} r^{-1/2} (1-r)^{-1}, & \text{si } r < 1, \\ (2r-1)^{-1/2} (r-1)^{-1}, & \text{si } r \geq 1, \end{cases}$$

$$\rho(\theta = 0) = (2r)^{-1/2} (r+2)^{-1}. \quad (2.17)$$

Este par de ecuaciones indican que: (a) hay una acumulación de gas acretado alrededor del objeto central, ya que conforme r tiende a cero la densidad diverge, independientemente del valor de θ , y (b) en $r = 1$, $\theta = \pi/2$, i.e. en el borde del disco, la densidad también diverge. Este último comportamiento se debe a efectos de borde pues se ha considerado un

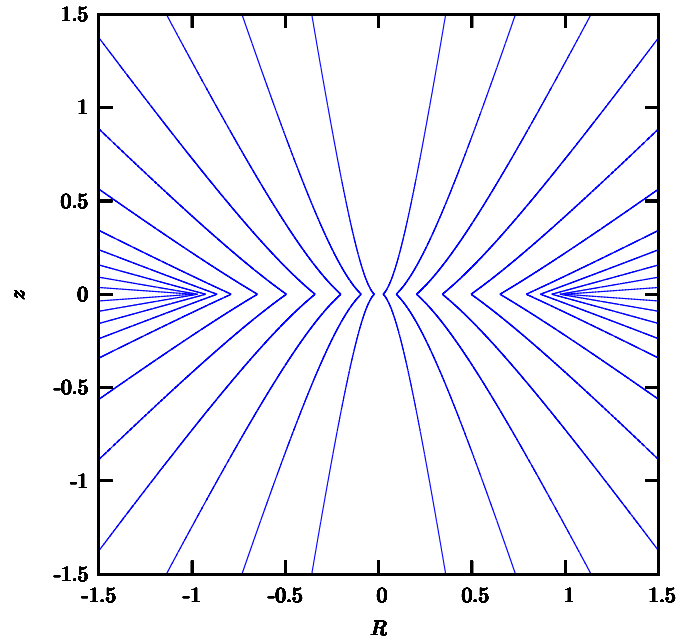


Figura 2.1: La figura, que corresponde a una proyección del plano azimutal $\varphi = \text{const.}$, muestra líneas de corriente producidas por la atracción gravitacional hacia un objeto estelar que se encuentra en el origen de coordenadas. Dicho objeto está embebido en una nube de gas de dimensiones infinitas, la cual posee un momento angular específico alrededor del eje z dado por $h_\infty \ll 1$. Las líneas de corriente colisionan con su contraparte simétrica en el plano xy de manera tal que la componente de la velocidad en dirección ortogonal al plano se termaliza. Las partículas quedan rotando alrededor del eje z por conservación de momento angular formando un disco de acreción. En la figura las distancias están medidas en unidades del radio del disco r_d y la coordenada $R = x^2 + y^2$.

disco infinitamente delgado.

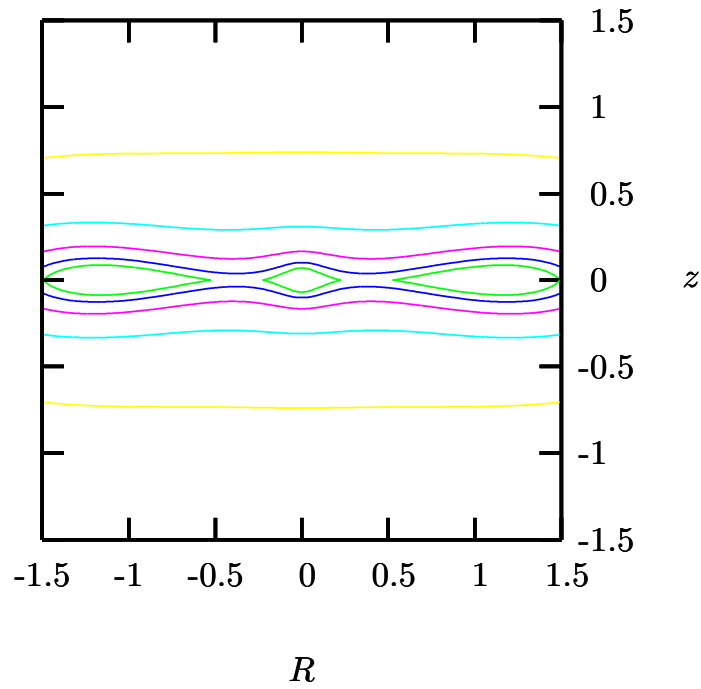


Figura 2.2: Las líneas representan isocontornos de densidad del flujo de acreción correspondientes a una proyección del plano azimutal $\varphi = \text{const.}$, cuyos valores están dados por $\rho/\rho_0 = 0.1, 0.6, 1.1, 1.6, 2.1, 2.6$. Las distancias están medidas en unidades del radio del disco r_d . Esta figura muestra que las partículas se acumulan en $r = 1$ y $r = 0$ al caer sobre el plano ecuatorial.

Capítulo 3

Acreción relativista

§3.1. Mecánica de fluidos relativista

Existen dos razones por las cuales es necesario formular una versión relativista de la *Mecánica de fluidos*: (a) la velocidad del flujo macroscópico es comparable con la de la luz y, (b) el movimiento microscópico de las partículas es suficientemente grande de tal manera que las ecuaciones de la dinámica de fluidos son considerablemente modificadas (Landau & Lifshitz, 1995).

Con el fin de derivar las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos es necesario establecer la forma del 4-tensor de energía-momento $T^{\alpha\beta}$ para un fluido en movimiento.[†] Este tensor tiene las siguientes propiedades (Landau & Lifshitz, 1994a): $T^{00} = -T_{00}$ es la densidad de energía, $T^{0a}/c = T_{0a}/c$ es la a -ésima componente de la densidad de momento; $T^{ab} = T_{ab}$ es el tensor de densidad de flujo de momento. Finalmente, el 3-vector de densidad de flujo de energía está dada por cT_{0a} .

El flujo de momento a través de un elemento de área $d\mathbf{a}$ sobre la superficie de un cuerpo es justamente la fuerza que actúa sobre éste. Por lo tanto $T^{ab}d\mathbf{a}_b$ es la a -ésima componente de la fuerza que actúa sobre el elemento de superficie. Considérese ahora un elemento de volumen en su sistema local en reposo, i.e. en el sistema de laboratorio. En este sistema de referencia la ley de Pascal es válida. Por lo tanto es posible escribir $T^{ab}d\mathbf{a}_b = p d\mathbf{a}_a$.

[†] La notación por ser usada de ahora en adelante es la siguiente: índices y subíndices griegos (α , β , etc.) toman valores 0, 1, 2, 3. La coordenada $x^0 = ct$ es la coordenada temporal. La velocidad de la luz está representada por c . Las coordenadas espaciales son $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Los índices y subíndices latinos toman valores 1, 2, 3 y corresponden a las coordenadas espaciales. La métrica de Minkowski $g_{\mu\nu}$ corresponde al tensor métrico con componentes $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Las componentes T^{0a} que corresponden a la densidad de momento son nulas en el sistema local en reposo. La componente T^{00} es la densidad de energía interna propia e del fluido.

Como la 4-velocidad unitaria u^α satisface que en el sistema local en reposo $u^0 = 1, u^k = 0$, entonces $T^{\alpha\beta}$ toma la forma (cf. Landau & Lifshitz (1995))

$$T^{\alpha\beta} = wu^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}, \quad (3.1)$$

donde

$$w = e + p, \quad (3.2)$$

y w es la entalpía por unidad de volumen. Con estas consideraciones es posible deducir las ecuaciones de movimiento de la mecánica de fluidos. Estas ecuaciones están determinadas por el hecho de la nulidad en la divergencia del tensor de energía-momento, i.e.

$$\frac{\partial T_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (3.3)$$

Esta ecuación contiene las leyes de conservación de energía y momento para el sistema físico al cual pertenece $T^{\alpha\beta}$. Para obtener las ecuaciones de movimiento del fluido, se emplea el tensor de energía-momento dado por (3.1). Debido a que en el tensor de energía-momento no se están considerando efectos disipativos, las ecuaciones que de éste se deriven corresponden a un fluido ideal relativista. La ecuación de conservación del número de partículas en hidrodinámica está dada por (Landau & Lifshitz, 1995)

$$\frac{\partial nu^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (3.4)$$

en donde $n^\alpha = nu^\alpha$ es el 4-vector de flujo de partículas y n es un escalar que corresponde a la densidad propia del número de partículas.

Por otra parte, un tensor ortogonal a u^α es $\delta_\alpha^\gamma - u_\alpha u^\gamma$, pues la contracción de ambos es nula. Por tanto, proyectando (3.3) en la dirección de este tensor se obtiene

$$\frac{\partial T_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} - u_\beta u^\alpha \frac{\partial T_\alpha^\gamma}{\partial x^\gamma} = 0. \quad (3.5)$$

Sustitución directa del tensor de energía-momento (3.1) en esta ecuación implica

$$wu^\alpha \frac{\partial u_\eta}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial p}{\partial x^\eta} - u_\eta u^\alpha \frac{\partial p}{\partial x^\alpha}. \quad (3.6)$$

Las tres componentes espaciales de esta ecuación son la generalización relativista de la ecuación de Euler. Por otro lado, la segunda ley de la termodinámica está dada por

$$d\left(\frac{w}{n}\right) = T d\left(\frac{\sigma}{n}\right) + \frac{1}{n} dp \quad (3.7)$$

donde T es la temperatura, σ la entropía por unidad de volumen y $1/n$ el volumen por partícula. Para un flujo adiabático $d(\sigma/n) = 0$, y por lo tanto la ecuación (3.6) toma la forma

$$u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{w}{n} u_\eta\right) = \frac{\partial}{\partial x^\eta} \left(\frac{w}{n}\right). \quad (3.8)$$

Si adicionalmente el flujo es estacionario entonces las componentes espaciales de la ecuación (3.8) están dadas por

$$\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \left(\gamma w \frac{\mathbf{v}}{n}\right) + c^2 \mathbf{grad} \left(\frac{w}{n}\right) = 0. \quad (3.9)$$

Al multiplicar escalarmente esta ecuación por \mathbf{v} se obtiene que $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})(\gamma w/n) = 0$. Por lo tanto, a lo largo de cualquier línea de corriente se tiene que

$$\gamma \frac{w}{n} = \text{const.} \quad (3.10)$$

Esta ecuación es la generalización relativista de la *Ecuación de Bernoulli*. Para $c \rightarrow \infty$, $w/n = mc^2 + mw_{\text{non-r}}$ y $\gamma = 1 + v^2/2c^2$, donde $w_{\text{non-r}}$ es la entalpía por unidad de masa. De aquí que esta ecuación converge a $v^2/2 + w = \text{const.}$, i.e. la versión no-relativista y libre de fuerzas externas de la ecuación de Bernoulli (cf. ecuación (1.23)).

§3.2. Ecuación de Bernoulli en presencia de campos gravitacionales intensos

Las ecuaciones básicas de movimiento en presencia de campos gravitacionales intensos son la conservación de flujo de masa y energía dadas por (Landau & Lifshitz, 1994a)

$$n^\alpha{}_{;\alpha} = 0, \quad T_0^\alpha{}_{;\alpha} = 0, \quad (3.11)$$

donde (;) denota la derivada covariante (Wald, 1984). Al considerar un flujo estacionario y esféricamente simétrico estas ecuaciones toman la forma (Michel, 1972)

$$\frac{d}{dr} (n^r \sqrt{-g}) = 0, \quad \frac{d}{dr} (T_0^r \sqrt{-g}) = 0. \quad (3.12)$$

Integrando estas ecuaciones para el caso de un fluido perfecto se tiene que

$$n U^r \sqrt{-g} = C_1, \quad (p + e) U_0 U^r \sqrt{-g} = C_2, \quad (3.13)$$

donde C_1 , C_2 son constantes, n es la densidad propia, (i.e. la que observada al moverse con el fluido), p es la presión propia, y e es la densidad de energía propia total, $U^r = dr/ds$ y $U_0 = e^\nu dt/ds$.

Considerando la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.14)$$

donde el determinante de la métrica $g = -c^2 r^4 \sin^2 \theta e^{\nu+\lambda}$ y las cantidades $e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - 2m/r$, con $m := GM/c^2$ donde M es la masa del objeto compacto. Las coordenadas temporales, radiales, polares y azimutales están dadas por t, r, θ, φ , respectivamente.

Considerando esta métrica las ecuaciones de conservación toman la forma

$$n u r^2 = C_1, \quad (3.15)$$

al dividir las ecuaciones (3.13) y elevar al cuadrado se obtiene

$$\left(\frac{p + e}{n} \right)^2 \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2 \right) = \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 = C_3, \quad (3.16)$$

donde $u = U^r/c$. Esta ecuación es la integral de Bernoulli en un espacio-tiempo de Schwarzschild.

A continuación se presenta una manera alternativa de deducir la ecuación de Bernoulli en presencia de campos gravitacionales intensos.

La ecuación de Euler en presencia de campos gravitacionales intensos está dada por (Landau & Lifshitz, 1994a)

$$w u^\alpha u_\beta ;_\alpha = \frac{\partial p}{\partial x^\beta} - u_\beta u^\alpha \frac{\partial p}{\partial x^\alpha}. \quad (3.17)$$

En el caso de un espacio-tiempo estacionario, el tensor métrico satisface $g_{0a} = 0$, por lo tanto $u_0 = g_{0\beta}u^\beta = g_{00}u^0$. Por otro lado, $u^0 = \gamma/\sqrt{g_{00}}$, con $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, donde $v^\alpha = dx^\alpha/d\tau$, con τ el tiempo propio (Landau & Lifshitz, 1994a). De lo anterior se sigue que

$$u_0 = \sqrt{g_{00}}\gamma. \quad (3.18)$$

Si ahora se considera que el flujo es adiabático, entonces con la ayuda de la segunda ley de la Termodinámica (cf. ecuación (3.7)) la ecuación (3.17) toma la forma

$$u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{w}{n} u_\eta \right) = \frac{\partial}{\partial x^\eta} \left(\frac{w}{n} \right) + \frac{w}{n} u^\alpha u_\delta \Gamma_{\eta\alpha}^\delta, \quad (3.19)$$

donde $\Gamma_{\eta\alpha}^\delta$ representa los símbolos de Christoffel (cf. Apéndice C). La componente temporal de esta ecuación es (cf. Apéndice C)

$$\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla \left(\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} \right) = \frac{w}{2n} \left(u^\alpha u_0 g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} - u^\alpha u^0 \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} \right). \quad (3.20)$$

Con esto y utilizando la ecuación (3.18) se obtiene que

$$\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla \left(\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} \right) = 0. \quad (3.21)$$

Esta ecuación implica que[†]

$$\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} = \text{const.}, \quad (3.22)$$

a lo largo de cada línea de corriente. Esta ecuación es la generalización de la ecuación de Bernoulli en presencia de campos gravitacionales intensos. De hecho, esta ecuación puede ser reescrita de la siguiente manera usando (3.18):

$$\frac{w}{n} u_0 = \text{const.}, \quad (3.23)$$

a lo largo de cada línea de corriente. Esta ecuación tiene una aplicación directa en procesos de acreción relativista sobre objetos compactos. Es, de hecho, la contraparte de la ecuación de Bernoulli que Bondi empleó para obtener la física del proceso de acreción esféricamente

[†] La derivación de esta ecuación fue primeramente obtenida por Sergio Mendoza en 1997 y nunca publicada pues se consideró trivial de obtener.

simétrico y estacionario. Tal como se mostró en el la sección §1.4, las leyes fundamentales a partir de las cuales se puede hacer un estudio cualitativo del proceso de acreción son: la ley de conservación del número de partículas y la ecuación de Bernoulli o ley de conservación de energía.

Es necesario recalcar que la ecuación de Bernoulli obtenida aplica para campos gravitacionales estáticos, tales como el espacio descrito por la métrica de Schwarzschild. Por lo tanto, al contar con la ecuación de Bernoulli (3.22) en presencia de campos gravitacionales intensos y la ley de conservación de partículas (3.11) en su versión covariante, se está en posibilidad de estudiar un proceso de acreción esféricamente simétrico y estacionario sobre un objeto compacto, tal como un agujero negro de Schwarzschild, en el límite en que la masa acretada es despreciable con respecto a la masa original del objeto central.

§3.3. El rol de la ecuación de Bernoulli en la astrofísica relativista

A continuación se muestra la manera de aplicar la Ecuación de Bernoulli junto con la ecuación de conservación del número de partículas para obtener la física del proceso de acreción estacionario esférico sobre un agujero negro de Schwarzschild.

En el espacio descrito por la métrica de Schwarzschild (cf. ecuación (3.14)) se tiene que

$$u_0 = \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2\right)^{1/2}. \quad (3.24)$$

Por lo tanto, la ecuación de Bernoulli (3.23) toma la forma

$$\frac{w}{n} \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2\right)^{1/2} = \text{const.}, \quad (3.25)$$

en donde la constante es distinta para cada línea de corriente.

Bajo la suposición de un flujo de acreción estacionario y esféricamente simétrico se tiene que las ecuaciones de conservación son

$$nur^2 = \text{const.}, \quad (3.26)$$

y

$$\left(\frac{p+e}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2\right) = \text{const.} \quad (3.27)$$

La densidad de energía e incluye no solamente a la energía interna propia del gas, sino también a la densidad de energía en reposo nc^2 del mismo, i.e.

$$e = nc^2 + \varepsilon \quad (3.28)$$

Los puntos críticos asociados a las ecuaciones (3.26) y (3.27) se obtienen diferenciando ambas ecuaciones y eliminando dn de éstas para así obtener

$$\frac{dr}{r} \left[2V^2 - \frac{m}{r(1 - 2m/r + u^2)} \right] + \frac{du}{u} \left[V^2 - \frac{u^2}{(1 - 2m/r + u^2)} \right] = 0, \quad (3.29)$$

en donde

$$V^2 := \frac{d \ln(p+e)}{d \ln n} - 1. \quad (3.30)$$

El punto crítico ocurre cuando ambos corchetes en la igualdad (3.29) son iguales a cero, es decir,

$$u_c^2 = \frac{m}{2r_c}, \quad V_c^2 = \frac{u_c^2}{1 - 3u_c^2}. \quad (3.31)$$

Tal punto corresponde a material cayendo o saliendo del objeto compacto con velocidad monótonamente creciente a lo largo de la trayectoria de las partículas. Es claro que no existe solución física si $u_c^2 > 1/3$. Esta restricción implica que el punto crítico siempre está fuera de un objeto totalmente colapsado cuya frontera está dada por $r \rightarrow 2m$.

En el caso de un gas politrópico (1.28), la entalpía por unidad de volumen está dada por

$$w = p + \varepsilon = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p. \quad (3.32)$$

Defínase ahora a la ‘temperatura’ T mediante la siguiente relación

$$T := pn^{-1}. \quad (3.33)$$

Con ayuda de estas dos últimas relaciones y la ecuación (1.28), las ecuaciones (3.26) y (3.27) toman la forma

$$T^n u r^2 = C_1, \quad (3.34)$$

$$[1 + (1 + n)T]^2 \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2\right) = C_2, \quad (3.35)$$

en donde

$$V^2 := \frac{(1 + n)T}{n[1 + (1 + n)]}, \quad (3.36)$$

y el índice politrópico n satisface la relación

$$n = 1/(\kappa - 1). \quad (3.37)$$

Las cantidades C_1 y C_2 son constantes.

Considerando ahora un gas ultra-relativista para el cual $\kappa = 4/3$, dados r_c y u_c es posible conocer T_c , y por ende C_1 y C_2 . Por lo tanto, conforme $r \rightarrow \infty$ es posible determinar T_∞ y u_∞ así como T_s y u_s en $r = r_s \geq 2m$, con r_s el radio crítico (cf. sección §1.4). Este procedimiento es idéntico al que Bondi empleó, i.e. expresar las condiciones en la superficie del objeto compacto en términos de las condiciones a infinito.

Lejos del origen se espera que $u_\infty = 0$ y que la temperatura del medio externo $T_\infty \neq 0$. Por lo tanto,

$$C_1 \approx 1 + 8T_\infty, \quad \text{y también} \quad C_2 \approx \frac{(1 - 3u_c^2)^3}{(1 - 6u_c^2)^2} \approx 1 + 3u_c^2. \quad (3.38)$$

Además,

$$4T_c = \frac{3u_c^2}{1 - 6u_c^2} \approx 3u_c^2, \quad (3.39)$$

de donde se sigue que

$$T_c = 2T_\infty. \quad (3.40)$$

Al conocer la relación entre T_c y T_∞ se obtiene C_2

$$C_2 = T_c^3 u_c r_c^2 = \frac{3(6)^{1/2}}{16} T_\infty^{3/2} m^2. \quad (3.41)$$

Estas ecuaciones indican que las constantes de integración quedan determinadas en términos de T_∞ . Por otro lado, en la superficie observable del objeto compacto es posible suponer, a primera aproximación, que la temperatura $T_s \ll 1$, y por lo tanto $u_s^2 \approx 2m/r_s$. De esta manera, la ecuación (3.41) implica que

$$T_s = \frac{6^{1/2}}{4} T_\infty^{1/2} \left(\frac{m}{r_s} \right)^{2/3}. \quad (3.42)$$

La densidad n queda determinada mediante la relación politrópica y está dada por

$$\frac{n}{n_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^3. \quad (3.43)$$

Esta serie de resultados fueron obtenidos previamente por Michel (1972), quien resolvió directamente las ecuaciones de la hidrodinámica relativista (cf. ecuación (3.11)) y *no* la ecuación de Bernoulli (3.22). De hecho, la ecuación (3.22) representa directamente la componente temporal de la ecuación $T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0$.

Capítulo 4

Acreción relativista con rotación

Este capítulo muestra que es posible hacer una generalización relativista del modelo de acreción de Ulrich al considerar un espacio-tiempo descrito por la métrica de Schwarzschild. Esto es de utilidad inmediata en procesos de acreción con rotación sobre objetos compactos, e.g. enanas blancas y estrellas de neutrones, y sobre todo en agujeros negros de Schwarzschild. Se mostrará también que el modelo analítico propuesto converge al modelo de Ulrich para el caso $r \gg r_g$, así como al modelo de Michel cuando la nube de gas que rodea al agujero negro no tiene momento angular inicial.

§4.1. Mecánica celeste en relatividad general

Las ecuaciones de Einstein que gobiernan la geometría del espacio tiempo están dadas por

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}, \quad (4.1)$$

donde $G_{\alpha\beta}$ es el tensor de Einstein, $R_{\alpha\beta}$ es el tensor de Riemann, R es el escalar de Ricci (Chandrasekhar, 1983) y G es la constante gravitacional.

En el vacío, regiones donde $T_{\alpha\beta} = 0$, las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$G_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{o equivalentemente} \quad R_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.2)$$

Las ecuaciones de Einstein determinan los diez coeficientes del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ dadas las condiciones iniciales y de frontera del problema en cuestión. La propiedad más importante

del tensor de Einstein es que su 4-divergencia es nula

$$G_{\beta}^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0, \quad (4.3)$$

esta ecuación tiene un índice libre por lo que cualquier solución de las ecuaciones de Einstein debe involucrar cuatro funciones arbitrarias. La libertad que se tiene al elegir estas funciones se denomina *libertad de norma* y le da un carácter de ‘covariancia general’ a la teoría. Esta libertad de norma permite imponer cuatro ‘condiciones coordenadas’ sobre la métrica. En el vacío, el número de identidades de Bianchi se reducen de 20 a 16, dado que cuatro de las identidades incluidas en (4.3) son idénticamente satisfechas en virtud de la ecuación de campo (4.2) (Chandrasekhar, 1983).

La métrica de Schwarzschild es una solución estática y esféricamente simétrica para las ecuaciones de Einstein en el vacío (Landau & Lifshitz, 1994a). Esta solución, válida en el exterior del objeto compacto, describe el producto final de un colapso gravitacional, el cual contiene una singularidad cubierta por un agujero negro. Que esta solución sea particularmente importante para un colapso gravitacional se desprende del Teorema de Birkhoff (1923), el cual establece que si una región del espacio-tiempo es esféricamente simétrica y además es solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, entonces la geometría de este espacio-tiempo está descrita necesariamente por la métrica de Schwarzschild, i.e. este teorema implica la unicidad de la métrica de Schwarzschild (Misner et al., 1973) (cf. ecuación (3.14)).

En lo que resta de este trabajo se considera un sistema de unidades geometrodinámico en el cual $G = c = 1$.

El siguiente paso es estudiar el comportamiento de rayos de luz y cuerpos de prueba en el campo gravitacional exterior a un cuerpo simétrico. Debido a la simetría par de reflexión

$$\theta \rightarrow \pi - \theta,$$

de la métrica de Schwarzschild, si la posición inicial y el vector tangente de una geodésica están sobre el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, entonces toda la geodésica debe permanecer en dicho plano. Dado que toda geodésica puede llevarse a un plano ecuatorial mediante una rotación isométrica, esto implica que, sin pérdida de generalidad, es posible restringir el estudio de geodésicas a aquellas que están contenidas en planos ecuatoriales.

Las componentes de la base coordenada x^{μ} de la tangente u^{α} a una curva parametrizada por τ están dadas por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Para geodésicas temporales se puede hacer coincidir el parámetro τ con el tiempo propio, mientras que para geodésicas nulas τ es un parámetro afín. Bajo estas consideraciones, las geodésicas están dadas por

$$-\varsigma = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2, \quad (4.4)$$

donde

$$\varsigma := \begin{cases} 1 & \text{para geodésicas temporales,} \\ 0 & \text{para geodésicas nulas.} \end{cases}$$

Para obtener estas ecuaciones geodésicas es necesario considerar dos constantes de movimiento. La primera de ellas es

$$E = -g_{\alpha\beta} \xi^\alpha u^\beta = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (4.5)$$

donde ξ^α es el vector estático de Killing [†] (Misner et al., 1973) y E es una constante de movimiento que para geodésicas temporales representa la energía por unidad de masa en reposo de una partícula que sigue una determinada geodésica, con respecto a un observador en infinito.

La segunda constante de movimiento h está dada por el vector rotacional de Killing ψ^α :

$$h = g_{\alpha\beta} \psi^\alpha u^\beta = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (4.6)$$

Al tomar, sin pérdida de generalidad, la geodésica que está sobre el plano $\theta = \pi/2$, se tiene que

$$h = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (4.7)$$

Para geodésicas temporales, h es el momento angular por unidad de masa en reposo. Con estas constantes de movimiento es posible escribir la ecuación geodésica al sustituir las

[†] Los vectores ξ_α se denominan vectores de Killing y satisfacen las ecuaciones $\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$. Tal conjunto de ecuaciones determinan las transformaciones coordenadas infinitesimales que preservan la métrica.

ecuaciones (4.5) y (4.7) en (4.4). Si ahora se restringe el análisis a geodésicas temporales, i.e. a partículas materiales, se encuentra que

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right) = E^2. \quad (4.8)$$

Esta ecuación muestra que el movimiento radial de una geodésica temporal es similar al de una partícula de masa unitaria con energía E^2 en mecánica no-relativista unidimensional. Sin embargo, la novedad que aporta la relatividad general en esta ecuación es que, aparte del término gravitacional newtoniano $-2M/r$ y la barrera centrífuga h^2/r^2 , hay un nuevo potencial atractor dado por $-2Mh^2/r^3$ el cual domina a la barrera centrífuga para r suficientemente pequeño (Wald, 1984).

Tal como se hace en mecánica celeste newtoniana, es útil considerar r como función de φ en vez de τ . De esta manera, al utilizar la regla de la cadena en la ecuación (4.8) se obtiene

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2Mr^3}{h^2} - r^2 + 2Mr + (E^2 - 1) \left(\frac{r^4}{h^2}\right). \quad (4.9)$$

Al renombrar $E^2 - 1 := 2E_{\text{tot}}$ donde E_{tot} es la energía total de la partícula y haciendo el cambio de variable $u = r^{-1}$ se obtiene

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{2Mu}{h^2} + \frac{2E_{\text{tot}}}{h^2}. \quad (4.10)$$

Con el fin de trabajar con una ecuación adimensional es conveniente hacer el cambio de variable $v = Mu/h^2$, el cual implica

$$\left(\frac{dv}{d\phi}\right)^2 = \alpha v^3 - v^2 + 2v + \epsilon, \quad (4.11)$$

donde

$$\alpha := 2 \left(\frac{M}{h}\right)^2, \quad \epsilon := \frac{2E_{\text{tot}}h^2}{M^2}. \quad (4.12)$$

La ecuación (4.11) determina la geometría de las geodésicas en el plano invariante $\theta = \pi/2$. Aún más, esta ecuación gobierna la geometría de las órbitas en el plano invariante debido a que tal geometría está determinada por las raíces de la ecuación cúbica (Chandrasekhar, 1983)

$$f(v) = \alpha v^3 - v^2 + 2v + \epsilon. \quad (4.13)$$

El parámetro α hace la diferencia entre la relatividad general y la gravitación newtoniana. Finalmente, la excentricidad e de la órbita newtoniana generalizada está relacionada con ϵ mediante la relación

$$e^2 = 1 + \epsilon. \quad (4.14)$$

§4.2. Generalización del modelo de acreción de Ulrich

De la misma manera como se hizo en los modelos de acreción de Bondi y Michel, es necesario ahora imponer ciertas condiciones a infinito. La manera de hacerlo es considerando el momento angular de una partícula que cae hacia el agujero negro con velocidad v_0 a un ángulo polar inicial θ_0 y cuya distancia radial a éste es r_0 . Bajo estas consideraciones, el momento angular está dado por

$$h_{\infty*} = r_0^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = r_0 \gamma_0 v_0 \sin \theta_0, \quad (4.15)$$

donde γ es el factor de Lorentz para la velocidad v_0 .

Es necesario hacer notar que esta expresión obtenida para el momento angular corresponde a una distancia radial r_0 suficientemente lejos del agujero negro, i.e. $r \gg r_G := 2M$. Dicho de otra manera, este valor del momento angular es una condición a infinito. Inclusive, es claro que al considerar partículas no-relativistas, esta relación converge al momento angular newtoniano h_∞ (cf. sección §2.2).

Las consideraciones anteriores son esenciales para obtener la ecuación de la órbita.

En primer lugar, $f(v)$ es un polinomio cúbico en v , por lo tanto se tienen dos posibilidades: (a) todas las raíces son reales o (b) una de ellas es real y las dos restantes son un par de complejos conjugados.

El hecho de que la energía de las partículas es insuficiente para escapar del campo gravitacional del agujero implica que $\epsilon < 0$. Por lo tanto, los ceros v_1, v_2 y v_3 de $f(v)$ son todos reales y satisfacen la desigualdad $v_1 < v_2 < v_3$. Esto implica que $f(v)$ puede ser escrita como

$$f(v) = \alpha(v - v_1)(v_2 - v)(v_3 - v). \quad (4.16)$$

Al sustituir esta relación en (4.11) e integrándola se tiene

$$-\frac{2}{[(v_2 - v_1)(v_3 - v_1)]^{1/2}} \int \frac{dw}{[(w^2 - w_1^2)(w^2 - w_2^2)]^{1/2}} = \alpha^{1/2} \varphi, \quad (4.17)$$

donde $w_1^2 = 1/(v_2 - v_1)$, $w_2^2 = 1/(v_3 - v_1)$ y $v = v_1 + w^{-2}$. Esta integral elíptica puede resolverse en términos de funciones elípticas de Jacobi (Cayley, 1961; Hancock, 1917; Lawden, 1989) obteniéndose

$$\frac{1}{(v_3 - v_1)^{1/2}} \text{ns}^{-1}\{w(v_2 - v_1)^{1/2}\} = \alpha^{1/2} \varphi. \quad (4.18)$$

El módulo k de la función elíptica de Jacobi (cf. Apéndice B) está dada por

$$k^2 = \frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_1}. \quad (4.19)$$

De esta manera la ecuación de la órbita está dada por

$$v = v_1 + (v_2 - v_1) \text{sn}^2\left\{\frac{\varphi}{2} (\alpha(v_3 - v_1))^{1/2}\right\}. \quad (4.20)$$

Esta es la ecuación general para la órbita de partículas materiales que caen hacia un espacio-tiempo de Schwarzschild. Dado que se desea obtener una generalización del modelo de acreción de Ulrich, entonces esta ecuación debe converger a una parábola cuando $\alpha = 0$. Esto es posible si y solo si la excentricidad (4.14) es tal que $\mathbf{e} = 1$, y por lo tanto $\epsilon = 0$ (cf. Apéndice D). Por tanto, los ceros de (4.13) estén dados por

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{1 - (1 - 8\alpha)^{1/2}}{2\alpha}, \quad v_3 = \frac{1 + (1 - 8\alpha)^{1/2}}{2\alpha}.$$

Adicionalmente, el módulo k está dado por

$$k^2 = \frac{1 - (1 - 8\alpha)^{1/2}}{1 + (1 - 8\alpha)^{1/2}}.$$

Con estas relaciones es posible escribir la ecuación de la órbita como

$$v = \frac{h^2}{Mr} = v_2 \text{sn}^2 \varphi \beta, \quad (4.21)$$

donde

$$\beta := \frac{(\alpha v_3)^{1/2}}{2} = \left(\frac{1 + (1 - 8\alpha)^{1/2}}{8} \right)^{1/2}, \quad \text{y} \quad p := h^2/M.$$

Utilizando la propiedad (B.10) de las funciones elípticas de Jacobi del apéndice B, es posible reescribir la ecuación (4.21) de tal manera que se obtenga la expresión para una cónica relativista

$$r = \frac{p}{v_2(1 - \text{cn}^2\varphi\beta)}. \quad (4.22)$$

Como el momento angular de la partícula suficientemente lejos del agujero está dado por

$$h_{\infty*}^2 = (r_0 \gamma_0 v_0 \sin \theta_0)^2, \quad (4.23)$$

y adicionalmente $h_{\infty*}$ está relacionado con el momento angular h perpendicular al plano invariante mediante la relación (2.5), entonces

$$p = \frac{h^2}{M} = \frac{h_{\infty*}^2}{M} \sin^2 \theta_0 = r_* \sin^2 \theta_0. \quad (4.24)$$

Nótese que la longitud r_* converge al radio del disco newtoniano r_d definido en la ecuación (2.6) cuando $\alpha \rightarrow 0$. Por otro lado, esta órbita está sobre el plano $\theta = \pi/2$. Con el fin de obtener una ecuación en términos del ángulo polar θ así como el ángulo polar inicial θ_0 y que dicha ecuación reproduzca la geometría del espacio 3-dimensional cuando $\alpha \rightarrow 0$ se debe cumplir que[†]

$$\text{cn}^2\varphi\beta = \frac{\text{cn}^2\theta_0\beta + \text{cn}^2\theta\beta - 1}{2\text{cn}^2\theta_0\beta - 1}. \quad (4.25)$$

Como el plano invariante pasa por el origen de coordenadas, entonces la coordenada radial r es la misma si se toma un plano distinto a éste. Por lo tanto, el ángulo θ_0 de la ecuación anterior es el mismo que aparece en la relación (4.15). Esto implica que la ecuación de la órbita puede ser escrita como

$$r = \frac{r_* \sin^2 \theta_0 (2\text{cn}^2\theta_0\beta - 1)}{v_2(\text{cn}^2\theta_0\beta - \text{cn}^2\theta\beta)}. \quad (4.26)$$

[†] El lector pudiera pensar que la relación $\text{cn}\varphi\beta = \text{cn}\theta\beta/\text{cn}\theta_0\beta$ es la generalización natural de la ecuación (2.7). Sin embargo, tal relación no reproduce el campo de velocidades ni de densidad dados por las ecuaciones (2.9)–(2.13) cuando $\alpha \rightarrow 0$.

Es conveniente hacer las siguientes transformaciones con el fin de manipular ecuaciones adimensionales

$$\frac{r}{r_*} \rightarrow r, \quad \frac{v_i}{v_{k*}} \rightarrow v_i \quad (i = r, \theta, \varphi), \quad \frac{n}{n_0} \rightarrow n, \quad (4.27)$$

donde

$$v_i := \frac{di}{d\tau}, \quad n_0 := \frac{\dot{M}}{4\pi v_{k*} r_*^2}, \quad v_{k*} := \left(\frac{M}{r_*}\right)^{1/2}.$$

La tasa de acreción sobre el agujero está representada por \dot{M} . La velocidad v_k converge a su contraparte kepleriana cuando $\alpha \rightarrow 0$ (cf. ecuación (2.8)). El número de partículas por unidad de volumen n_0 es un factor de normalización cuya contraparte newtoniana, i.e. $\alpha \rightarrow 0$, corresponde a la tasa de acreción en el modelo de Bondi y r_* es tal como se definió en la ecuación (4.24).

Tomando todas las consideraciones anteriores, es posible obtener de manera analítica la ecuación de las órbita o líneas de corriente de las partículas, el campo de velocidades y la densidad del flujo de acreción (ver Apéndice D):

$$r = \frac{\sin^2 \theta_0 (2\text{cn}^2 \theta_0 \beta - 1)}{v_2 (\text{cn}^2 \theta_0 \beta - \text{cn}^2 \theta \beta)}, \quad (4.28)$$

$$v_r = -2r^{-1/2} \beta \frac{\text{cn} \beta \theta \text{sn} \beta \theta \text{dn} \beta \theta}{\sin \theta} f_1^{1/2}(\theta, \theta_0, v_2, \beta), \quad (4.29)$$

$$v_\theta = r^{-1/2} \frac{\text{cn}^2 \theta_0 \beta - \text{cn}^2 \theta \beta}{\sin \theta} f_1^{1/2}(\theta, \theta_0, v_2, \beta), \quad (4.30)$$

$$v_\varphi = r^{-1/2} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \left(\frac{v_2 (\text{cn}^2 \theta_0 \beta - \text{cn}^2 \theta \beta)}{2\text{cn}^2 \theta_0 \beta - 1} \right)^{1/2}, \quad (4.31)$$

$$n = \frac{r^{-3/2} \sin \theta_0}{2f_1^{1/2}(\theta, \theta_0, v_2, \beta) f_2(\theta, \theta_0, v_2, \beta)}. \quad (4.32)$$

Las funciones $f_1(\theta, \theta_0, v_2, \beta)$ y $f_2(\theta, \theta_0, v_2, \beta)$ están dadas por

$$f_1(\theta, \theta_0, v_2, \beta) := \frac{2 \sin^2 \theta (2\text{cn}^2 \theta_0 \beta - 1) - v_2 \sin^2 \theta_0 (\text{cn}^2 \theta_0 \beta - \text{cn}^2 \theta \beta)}{(2\text{cn}^2 \theta_0 \beta - 1) \{ (\text{cn}^2 \theta_0 \beta - \text{cn}^2 \theta \beta)^2 + (2 \beta \text{cn} \beta \theta \text{sn} \beta \theta \text{dn} \beta \theta)^2 \}},$$

$$f_2(\theta, \theta_0, v_2, \beta) := \beta \operatorname{cn} \beta \theta_0 \operatorname{sn} \beta \theta_0 \operatorname{dn} \beta \theta_0 + \{\sin \theta_0 \cos \theta_0 (2\operatorname{cn}^2 \theta_0 \beta - 1) - 2\beta \operatorname{cn} \beta \theta_0 \operatorname{sn} \beta \theta_0 \operatorname{dn} \beta \theta_0 \sin^2 \theta_0\} / v_2 r.$$

Las ecuaciones (4.28)–(4.32) son la solución analítica del problema de una nube de gas esférica con momento angular inicial que es acretada hacia el origen en un espacio–tiempo de Schwarzschild.

§4.3. Convergencia con modelos de acreción conocidos

La solución analítica propuesta en la sección §4.2 debe converger al modelo de Ulrich cuando $\alpha \rightarrow 0$. Para probar esto es necesario observar que si $\alpha \rightarrow 0$ entonces: (a) el módulo k de las funciones elípticas de Jacobi es nulo, (b) la raíz $v_2 \rightarrow 2$ y (c) el parámetro $\beta = 1/2$. Usando estos resultados así como las propiedades (B.10), (B.15)–(B.17) se tiene que las ecuaciones (4.28)–(4.32) convergen a las ecuaciones (2.9)–(2.13).

Aún más, si el momento angular de la nube de gas es nulo, entonces las igualdades (4.28)–(4.32) convergen a

$$v_r = - \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2}, \quad v_\theta = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad n = 2^{-1/2} r^{-3/2}. \quad (4.33)$$

Este conjunto de ecuaciones corresponden al caso de acreción radial en un espacio–tiempo de Schwarzschild. Esto corresponde exactamente al modelo de Michel de la sección §3.3 con presión nula.

§4.4. Un estudio detallado del modelo de acreción con rotación relativista

Como lo muestra la sección anterior, este modelo de acreción con rotación, no solo constituye una generalización del modelo de acreción de Ulrich. Más aún, es una modificación al modelo de acreción de Michel, en el mismo sentido que el modelo de Ulrich es una modificación al modelo de acreción de Bondi.

Este modelo de acreción con rotación satisface todos los requisitos para ser considerado la generalización del modelo de Ulrich:

(a) Las órbitas son obtenidas al considerar una partícula que cae libremente sobre el agujero negro, i.e. $E^2 = 1$, por lo que la energía total de la partícula $E_{\text{tot}} = 0$.

(b) Estas órbitas satisfacen ciertos requisitos, pues para constituirse como la generalización de una órbita parabólica se debe cumplir que la excentricidad generalizada e de la órbita sea 1, i.e. la energía total es nula. Además los ceros de la ecuación (4.16) deben ser reales, lo cual implica que $\alpha \leq 1/8$.

(c) Cuando $\alpha = 1/8$ entonces se pasa de un modelo de órbitas con contraparte parabólica a uno con contraparte hiperbólica. De hecho, cuando $\alpha = 1/8$ se tiene un modelo de acreción ultra-relativista, pues es el valor más grande permitido por el modelo, el cual equivale a que las partículas tengan un momento específico $h = 2r_g$. Para valores mayores de α las raíces de la ecuación (4.16) son imaginarias por lo que la ecuación geodésica (4.11) ya no describe el movimiento de partículas materiales (Martin, 1988).

(d) Adicionalmente, este es un modelo analítico exacto el cual considera al potencial de manera perfecta como lo predice la relatividad general. Recientemente, Lee & Ramirez-Ruiz (2006) utilizaron un modelo numérico del potencial Paczyński y Wiita para describir el modelo ultra-relativista $h = 2r_g$. El modelo presentado en la sección anterior es exacto, analítico y cubre sencillamente este caso ultra-relativista. De hecho, el modelo parte de una integración exacta de (4.16), sin hacer aproximaciones a primer orden, como las hechas por Beloborodov & Illarionov (2000) cuyo análisis parte de una aproximación a primer orden de (4.17). Lo que es más, el modelo propuesto en este capítulo proporciona información analítica del campo de velocidades y de la densidad del flujo de acreción.

Resumiendo, este modelo reproduce perfectamente el modelo de acreción de Ulrich $\alpha = 0$, con su campo de velocidades y de densidad. Proporciona información de un modelo de acreción con rotación relativista considerando el potencial dado naturalmente por la relatividad general. De hecho, la ecuación de la órbita, el campo de velocidades y la densidad de número de partículas son obtenidos al integrar exactamente la ecuación (4.16). Finalmente, el modelo también es capaz de dar información sobre un modelo de acreción ultra-relativista, donde $\alpha = 1/8$. Este modelo corresponde a órbitas cuya contraparte newtoniana es hiperbólica. Esta descripción es ultra-relativista porque es el máximo valor que α puede tomar dentro del modelo. De hecho, para este valor de α el término atractivo del potencial de relatividad general ($\sim r^{-3}$) tiene su máxima contribución.

Para valores mayores de α el modelo deja de ser una generalización del modelo de acreción de Ulrich, pues las raíces de la ecuación (4.16) son imaginarias, lo que implica que la ecuación de la órbita ya no describe el movimiento de partículas materiales (Martin,

1988). Por lo tanto, como $\alpha < 1/8$ entonces $h > 4M$ como lo indica la ecuación (4.12). Con el fin de sondear este resultado, tómesese el límite cuando $c \rightarrow \infty$, el cual reproduce el modelo de Ulrich. De esta manera $h > 0$, con h suficientemente pequeño. Como el modelo de Ulrich es una perturbación al modelo de Bondi, entonces la nube de gas rotando alrededor de la estrella debe tener un momento angular específico pequeño, tal como se mostró en el análisis del capítulo 2. Por lo tanto, este resultado concuerda con el análisis previo del modelo de Ulrich.

El modelo construido por Beloborodov & Illiaronov (2000) es tal que $h < 4M$. Si se toma el límite $c \rightarrow \infty$ entonces $h < 0$ lo cual es un absurdo. Si se considera que el momento angular específico es positivo por definición, entonces el modelo de Beloborodov & Illiaronov implica que en el límite newtoniano $h = 0$ [†], por lo tanto, dicho modelo no es una generalización correcta del modelo de Ulrich, en el cual el momento angular es distinto de cero.

§4.5. Diferencias entre el modelo de Ulrich y su generalización relativista

Cuando una partícula cae sobre el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ en el modelo de Ulrich, ésta trata de llegar a su última órbita estable, la cual se obtiene al sustituir la relación (2.7) en la ecuación (2.4), i.e.

$$r = \frac{h^2}{M(1 - \cos \theta / \cos \theta_0)}, \quad (4.34)$$

cuando $\cos \theta \rightarrow \pi/2$ entonces $r = h^2/M$.

Ahora bien, cuando las partículas llegan al plano $\theta = \pi/2$, éstas colisionan con su contraparte simétrica de tal manera que la componente de la velocidad en dirección ortogonal al plano ecuatorial se termaliza[‡]. Este hecho implica necesariamente que $E < 0$ (cf. ecuación (2.2)), i.e. la excentricidad de la órbita $e < 1$ (cf. Landau & Lifshitz). Por lo tanto las órbitas descritas por las partículas sobre el plano ecuatorial son elípticas. Como

[†] Si $0 < h < 0$ necesariamente $h = 0$.

[‡] Al hacer un balance entre la fuerza centrífuga $\sim h^2/r^3$ con la fuerza gravitacional GM/r^2 se encuentra que la condición de equilibrio se alcanza en el punto $r = h^2/M$. Tal resultado se obtiene al considerar únicamente la componente azimutal de la velocidad. Sin embargo, la velocidad de las partículas sobre el plano ecuatorial incluye las componentes azimutal y radial, pues únicamente la componente perpendicular al plano es termalizada.

las únicas órbitas estables para un potencial central newtoniano son circulares, entonces las órbitas sobre el plano ecuatorial en el modelo de Ulrich son inestables. Eventualmente las partículas serán acretadas por el objeto central. Un estudio detallado de este proceso queda fuera del enfoque de este trabajo.

Del mismo modo, en el modelo de acreción generalizado se observa que cuando las partículas caen sobre el plano ecuatorial, no alcanzan una órbita estable. Se debe ser precavido de no pensar que las trayectorias circulares predichas por relatividad general corresponden a las últimas órbitas circulares estables para una partícula con un α dado. Por ejemplo, para un α fijo, la última órbita circular estable está dada por (Wald, 1984)

$$r_{\text{circ}} = \frac{h_*^2}{2M} \left\{ 1 \pm (1 - 6\alpha)^{1/2} \right\}. \quad (4.35)$$

Tal relación se obtiene al considerar el potencial relativista y derivarlo para encontrar sus puntos críticos. Los mínimos de tal potencial corresponden a órbitas estables, dadas por el signo positivo en la ecuación (4.35). Los máximos corresponden a órbitas inestables. Por ejemplo, si $\alpha = 1/8$ se tiene que $r_+ = 6r_g$ o bien $r_+ = (3/4)r_*$. En este caso, α proporciona la órbita circular estable más interna posible. Para valores más pequeños de α el radio de la órbita circular crece hasta alcanzar el radio de disco newtoniano, i.e. $r \rightarrow h^2/M$ cuando $\alpha \rightarrow 0$.

Sin embargo, este análisis está totalmente errado, pues las órbitas circulares estables de las partículas relativistas que caen sobre el plano ecuatorial tienen un radio mayor al radio r_{circ} . Con el fin de mostrar este comportamiento es útil considerar una gráfica de densidad vs. distancia radial r^\dagger .

La Figura 4.1 muestra que conforme aumenta el valor de α , el radio del disco empieza a alejarse del objeto compacto de tal manera que la densidad en el borde del disco no diverge a menos que $\alpha = 0$. La Figura 4.2 es una gráfica del radio del disco real vs. α que muestra claramente este comportamiento.

Por lo tanto, cuando las partículas relativistas caen sobre el plano ecuatorial, no lo hacen sobre su última órbita circular estable. De hecho, lo que podemos llamar radio del disco real, i.e. el bulto de materia que se desvanece conforme se aleja del agujero negro, empieza a crecer dramáticamente conforme $\alpha \rightarrow 1/8$. La serie de Figuras 4.3 muestran claramente este comportamiento.

[†] Los cálculos numéricos hechos para la obtención de las Figuras fueron hechos con software libre (www.gnu.org). Los programas fueron hechos en C, utilizando la librería ‘GNU Scientific Library’ para

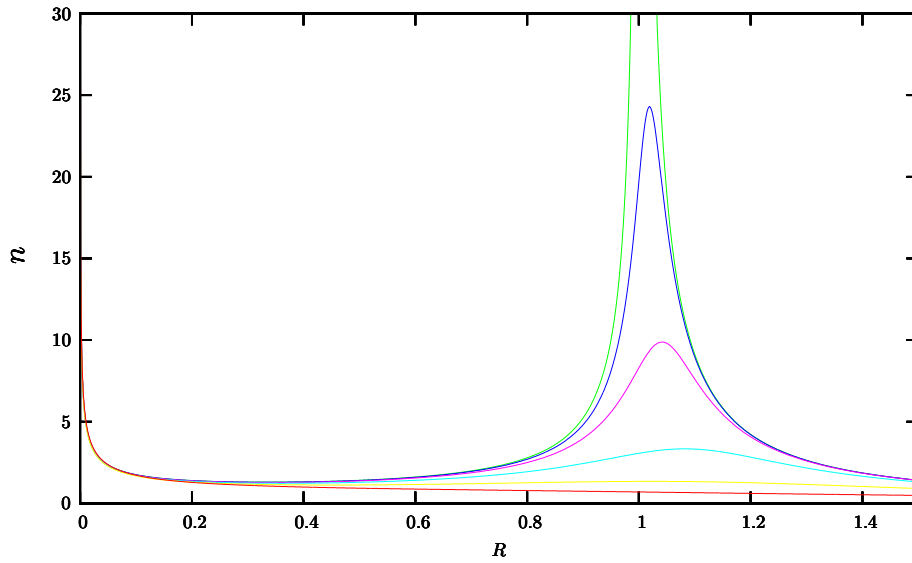


Figura 4.1: Esta figura muestra que la divergencia en el número de partículas por unidad de volumen n en el radio del disco newtoniano $r_* = 1$ para $\alpha = 0$ se desvanece conforme aumenta el valor del parámetro α . La figura muestra la variación del número de partículas por unidad de volumen n como función de la distancia al origen R para valores de $\alpha = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 0.125$.

No obstante de tener este análisis numérico tan detallado, es necesaria una demostración analítica la cual muestre que cuando la partícula cae sobre el ecuador y se toma el límite $\theta_0 \rightarrow \pi/2$, el ‘radio del disco real’ se va a infinito conforme $\alpha \rightarrow 1/8$.

§4.6. Modelo de acreción ultra-relativista

Cuando $\alpha \rightarrow 1/8$, entonces el módulo k de las funciones elípticas de Jacobi tiende a 1 (cf. ecuaciones (B.18)–(B.20), $v_2 = 4$ y $\beta = 8^{-1/2}$). Por lo tanto, el modelo de acreción relativista con rotación converge al modelo de acreción ultra-relativista con rotación dado por

la evaluación de las funciones elípticas en los casos necesarios.

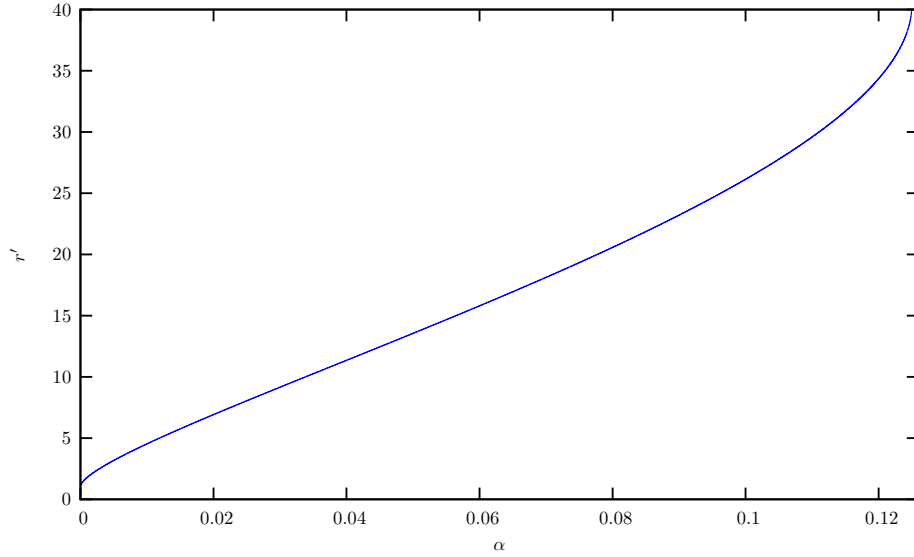


Figura 4.2: La figura muestra que el ‘radio del disco real’ r' , normalizado a *unidades arbitrarias*, crece desde el radio del disco newtoniano $r_* = 1$ para $\alpha = 0$, hasta infinito para $\alpha \rightarrow 1/8$.

$$r = \frac{\sin^2 \theta_0 (2 \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 - 1)}{4 (\operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 - \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta)}, \quad (4.36)$$

$$v_r = -r^{-1/2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta \tanh \frac{\sqrt{2}}{4} \theta}{\sin \theta} f_1^{1/2}(\theta, \theta_0), \quad (4.37)$$

$$v_\theta = r^{-1/2} \frac{\operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 - \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta}{\sin \theta} f_1^{1/2}(\theta, \theta_0), \quad (4.38)$$

$$v_\varphi = 2r^{-1/2} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \left(\frac{(\operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 - \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta)}{2 \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 - 1} \right)^{1/2}, \quad (4.39)$$

$$n = \frac{r^{-3/2} \sin \theta_0}{2 f_1^{1/2}(\theta, \theta_0) f_2(\theta, \theta_0)}. \quad (4.40)$$

noindent Donde $f_1(\theta, \theta_0)$ y $f_2(\theta, \theta_0)$ están dadas por

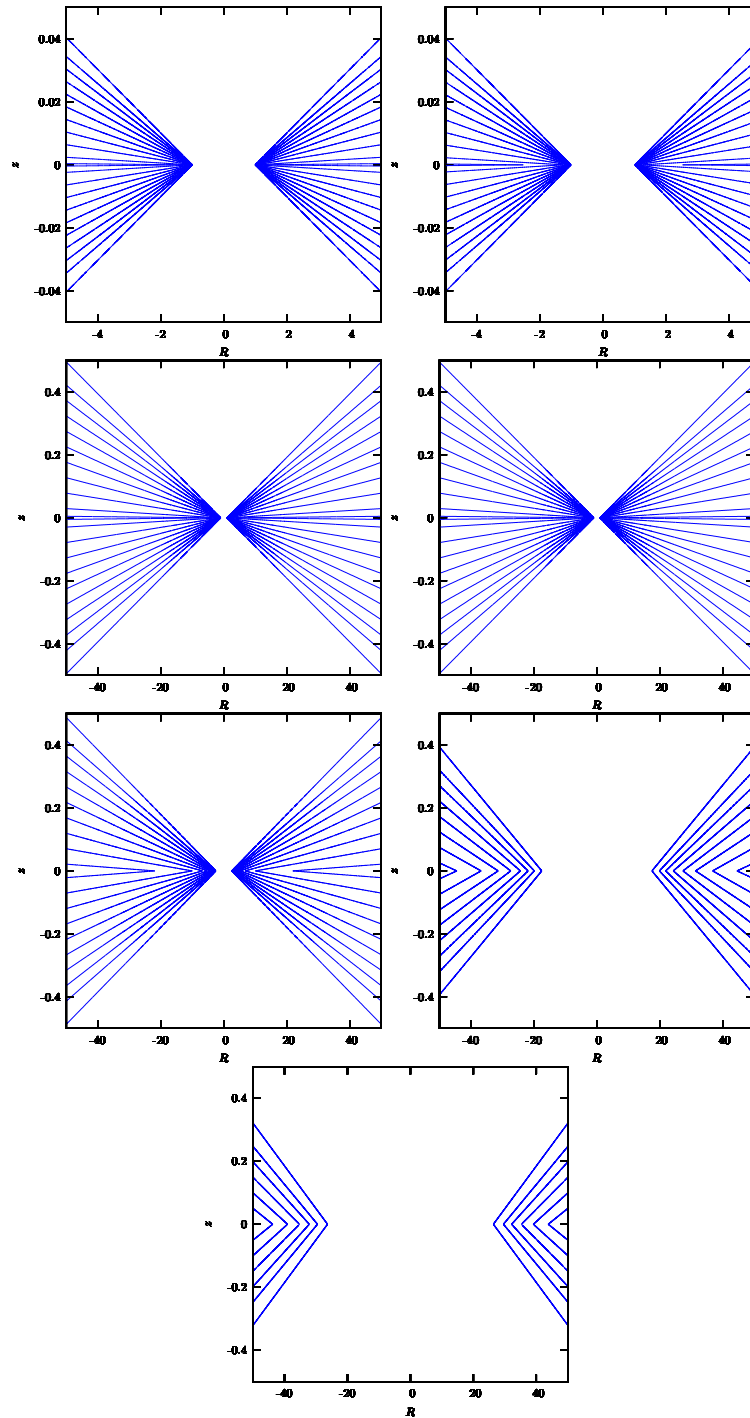


Figura 4.3: Esta serie de figuras muestran la evolución del disco conforme aumenta el parámetro α . Las dos primeras son un acercamiento para valores de $\alpha = 10^{-5}$ y 10^{-4} . Tales figuras muestran que las líneas de corriente se acumulan en el radio del disco newtoniano $r_* = 1$ para $\alpha \rightarrow 0$. Las dos siguientes muestran que para los mismos valores de $\alpha = 10^{-5}$ y 10^{-4} , hay líneas de corriente que convergen lejos del radio del disco r_* . Tal comportamiento se acentúa dramáticamente en las tres figuras restantes, que corresponden a valores de $\alpha = 10^{-2}, 10^{-1}, 0.125$, respectivamente. En las figuras las distancias están medidas en unidades del radio del disco r_* .

$$f_{1U}(\theta, \theta_0) := \frac{2 \sin^2 \theta (2 \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 - 1) - 4 \sin^2 \theta_0 (\operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 - \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta)}{(2 \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 - 1) \{ (\operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 - \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta \tanh \frac{\sqrt{2}}{4} \theta)^2 \}},$$

$$f_{2U}(\theta, \theta_0) := \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 \tanh \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 + \{ \sin \theta_0 \cos \theta_0 (2 \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 \tanh \frac{\sqrt{2}}{4} \theta_0 \sin^2 \theta_0 \} / 4r.$$

Con base en la ecuación (2.9) del modelo newtoniano de Ulrich, cuando $\theta = \pi/2$, entonces $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ y las partículas se encuentran sobre el disco de acreción, pues al tomar dicho límite se tiene que $r = 1$. En el caso ultra-relativista, tomando el mismo límite para la ecuación (4.36), se encuentra que $r \rightarrow \infty$, i.e. el disco de acreción abarca *todo* el plano ecuatorial. Esta prueba analítica cierra el círculo de razonamientos expuestos en la sección anterior, en donde se expuso que el radio del disco evolucionaba al aumentar el valor de α hasta diverger cuando $\alpha = 1/8$.

Es importante recalcar que este último modelo está fuera de los límites del modelo de Ulrich, ya que éste tiene una ecuación de órbita con contraparte hiperbólica en el caso newtoniano.

El que el borde del ‘disco real de acreción’ se encuentra en infinito implica que las partículas son acretadas desde la frontera de la nube de gas que cae sobre el objeto central. La distribución de densidad ya no registra una singularidad como en el caso de Ulrich en el ‘radio del disco real’, más bien, hay una distribución monótonamente decreciente de la densidad a partir del origen.

Finalmente, es útil hacer una comparación de las líneas de corriente entre un potencial de Paczyński y Wiita (Lee & Ramirez-Ruiz, 2006) y el potencial de relatividad general para el modelo ultra-relativista con $h = 2r_g$. Este comportamiento se muestra en las Figuras 4.4 y 4.5.

Estas gráficas muestran que en el modelo ultra-relativista las líneas de corriente difieren tanto a grande como a pequeña escala. Cerca del horizonte de eventos, las partículas tienen más energía que las asociadas al potencial empleado por Lee & Ramirez-Ruiz. Más aún, se observa claramente que las líneas de corriente empiezan a alejarse rápidamente conforme se acercan al plano ecuatorial.

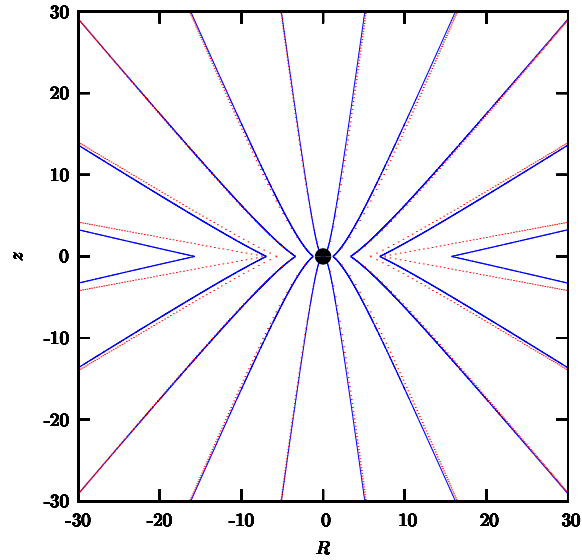


Figura 4.4: Las líneas de corriente del potencial Paczyński - Wiita (líneas punteadas) tienen un comportamiento similar a las del potencial relativista (líneas continuas) para $\theta_0 \rightarrow 0$. Sin embargo, conforme $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ las líneas de corriente asociadas al potencial relativista se pegan al plano ecuatorial y se alejan del objeto compacto. En contraparte, las líneas de corriente asociadas al potencial Paczyński - Wiita se acumulan alrededor de $\approx 10r_g$ y quedan por encima de las relativistas. En la figura las distancias están medidas en unidades del radio de Schwarzschild r_g . Los datos de la simulación del potencial Paczyński y Wiita correspondientes a un momento angular $h = 2r_g$ fueron generosamente proporcionados por el Dr. William Lee.

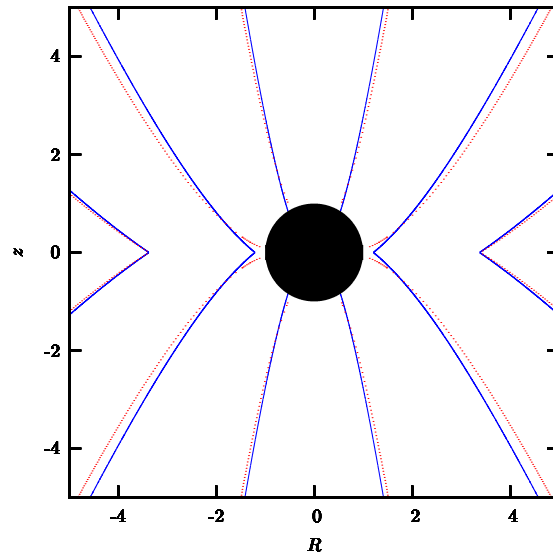


Figura 4.5: Muy cerca del horizonte de eventos las líneas asociadas al potencial Paczyński–Wiita (líneas punteadas) caen directamente sobre el agujero. En contraparte, las líneas asociadas al potencial relativista (líneas continuas) aún tienen suficiente energía para llegar al plano ecuatorial sin ser tragadas por el objeto compacto. En la figura las distancias están medidas en unidades del radio de Schwarzschild r_g . Los datos de la simulación del potencial Paczyński y Wiita correspondientes a un momento angular $h = 2r_g$ fueron generosamente proporcionados por el Dr. William Lee.

Conclusiones

En esta Tesis se presentó la generalización de la ecuación de Bernoulli en presencia de campos gravitacionales intensos. Se mostró que es posible deducir el modelo de acreción de Michel con base en esta ley de conservación de energía al combinarla con la ley de conservación del número de partículas en su versión covariante.

Además, se probó que es posible construir de manera exacta y analítica el campo de velocidades y de densidad de número de partículas para el flujo de acreción generalizado de Ulrich al considerar partículas que obedecen el potencial de relatividad general. Las funciones elípticas de Jacobi, solución al problema de acreción, permiten pasar al límite newtoniano y al ultra-relativista de manera elegante y sencilla.

El modelo de acreción ultra-relativista cubre el modelo de Lee & Ramirez-Ruiz para un momento angular $h = 2r_g$ y muestra que el disco de acreción se encuentra extendido sobre todo el plano ecuatorial. Además, cerca del agujero negro las líneas asociadas al potencial de relatividad general poseen más energía que las asociadas al potencial de Paczyński-Wiita, pues éstas últimas son tragadas por el agujero negro al llegar al plano ecuatorial, mientras que las primeras son capaces de orbitar alrededor del agujero antes de ser tragadas. Por otro lado, lejos del agujero negro, las líneas de corriente asociadas al modelo ultra-relativista caen rápidamente al plano ecuatorial, de tal manera que no alcanzan a llegar a órbitas más internas y formar un disco de acreción tipo Ulrich.

El modelo aquí presentado se propone para ser empleado en el estudio de procesos de acreción en enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros.

Apéndice

§A. Solución de la ecuación de órbita

La ecuación (2.9) puede identificarse fácilmente con una ecuación algebraica reducida de tercer orden de Cardán

$$x^3 \pm 3ax + 2b = 0, \quad (\text{A.1})$$

con

$$a = \frac{|r-1|}{3}, \quad b = -\frac{r \cos \theta}{2}, \quad y \quad x = \cos \theta_0. \quad (\text{A.2})$$

Las soluciones generales de (A.1) están dadas por (Namias, 1984)

$$x = \begin{cases} 2a^{1/2} \sinh \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{arcsinh} \left(-b/a^{3/2} \right) \right\}, & \text{si } a > 0, \\ 2a^{1/2} \cosh \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{arccosh} \left(-b/a^{3/2} \right) \right\}, & \text{si } a < 0 \text{ y } b^2 - a^3 > 0, \\ 2a^{1/2} \cos \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{acos} \left(-b/a^{3/2} \right) \right\}, & \text{si } a < 0 \text{ y } b^2 - a^3 < 0, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Para cada caso en la relación (A.3) hay tres distintas soluciones debido a que

$$\begin{aligned} a \cos z &= \pm a \cos_p z + 2k\pi, \\ \operatorname{arcsinh} z &= (-)^k \operatorname{arcsinh}_p z + 2k\pi i, \\ \operatorname{arccosh} z &= \pm \operatorname{arccosh}_p z + 2k\pi i, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. El subíndice p se refiere a la hoja principal de Riemann.

Debido a que las soluciones que se buscan son reales, entonces $k = 0$ en el segundo y tercer casos del conjunto de ecuaciones (A.4). Debido a la simetría azimutal del modelo basta considerar al ángulo polar θ en el rango $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Para encontrar el valor de k en la última solución de la ecuación (A.3) nótese que si se nombra $c = -b/a^{3/2}$ entonces basta con analizar el comportamiento de la función $f = \cos\{(a \cos c)/3 + 2k\pi\}$ con $k = 0, 1$. Cuando $c > 0$ se espera que $f \geq 0$. Como $f(c \geq 0, k = 0) > 0$ entonces la solución buscada ocurre para $k = 0$, i.e. la solución completa a la ecuación (2.9) está dada por la relación (A.3).

§B. Fundamentos de funciones elípticas de Jacobi

En este apéndice se mencionan algunas de las propiedades básicas de las funciones elípticas de Jacobi. Los fundamentos matemáticos y las demostraciones correspondientes están excelentemente detalladas en los libros de Cayley A. (1961), Derek F. Lawden (1989) y Hancock H. (1917).

Las funciones Theta $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y θ_4 están definidas para todo número complejo z y parámetro real q tal que $|q| < 1$ de la siguiente manera:

$$\theta_1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \sin(2n+1)z, \quad (\text{B.5})$$

$$\theta_2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos(2n+1)z, \quad (\text{B.6})$$

$$\theta_3 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n)^2} \cos 2nz, \quad (\text{B.7})$$

$$\theta_4 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n q^{(n)^2} \cos 2nz. \quad (\text{B.8})$$

Estas expansiones en serie de Fourier (B.5)–(B.8) implican que θ_1 y θ_2 tienen periodo 2π , mientras que θ_3 y θ_4 tienen periodo π .

Las funciones elípticas de Jacobi (Lawden, 1989), $\text{sn}w$, $\text{cn}w$ y $\text{dn}w$ están definidas en términos de cocientes de las funciones Theta de la siguiente manera

$$\text{sn}w = \frac{\theta_3(0) \theta_1(z)}{\theta_2(0) \theta_4(z)}, \quad \text{cn}w = \frac{\theta_4(0) \theta_2(z)}{\theta_2(0) \theta_4(z)}, \quad \text{dn}w = \frac{\theta_4(0) \theta_3(z)}{\theta_3(0) \theta_4(z)}, \quad (\text{B.9})$$

donde $z = w/\theta_3^2(0)$. Por definición, las funciones elípticas de Jacobi satisfacen las siguientes identidades

$$\text{sn}^2w + \text{cn}^2w = 1, \quad (\text{B.10})$$

$$\text{dn}^2w + k^2 \text{sn}^2w = 1, \quad (\text{B.11})$$

$$\text{dn}^2w - k^2 \text{cn}^2w = k'^2, \quad (\text{B.12})$$

donde k y k' son el módulo y el módulo complementario de las funciones elípticas, definidos por

$$k = \frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}, \quad k' = \frac{\theta_4^2(0)}{\theta_3^2(0)}. \quad (\text{B.13})$$

Estos módulos satisfacen la relación

$$k^2 + k'^2 = 1. \quad (\text{B.14})$$

Algunos límites importantes de las funciones elípticas de Jacobi ocurren cuando $k \rightarrow 0$. En efecto, justo en este límite, algunas de estas funciones convergen a funciones trigonométricas y valores fijos:

$$\text{sn}(w, k) \rightarrow \sin w, \quad (\text{B.15})$$

$$\text{cn}(w, k) \rightarrow \cos w, \quad (\text{B.16})$$

$$\text{dn}(w, k) \rightarrow 1. \quad (\text{B.17})$$

Por otro lado, cuando $k \rightarrow 1$ se obtienen las funciones hiperbólicas

$$\text{sn}(w, k) \rightarrow \tanh w, \quad (\text{B.18})$$

$$\text{cn}(w, k) \rightarrow \text{sech } w, \quad (\text{B.19})$$

$$\text{dn}(w, k) \rightarrow \text{sech } w. \quad (\text{B.20})$$

Nueve funciones elípticas más se obtienen al tomar cocientes o recíprocos de las ya definidas tal como se muestra a continuación

$$\text{ns}w = 1/\text{sn}w, \quad \text{nc}w = 1/\text{cn}w, \quad \text{nd}w = 1/\text{dn}w, \quad (\text{B.21})$$

$$\text{sc}w = \text{sn}w/\text{cn}w, \quad \text{cd}w = \text{cn}w/\text{dn}w, \quad \text{ds}w = \text{dn}w/\text{sn}w, \quad (\text{B.22})$$

$$\text{cs}w = \text{cn}w/\text{sn}w, \quad \text{dc}w = \text{dn}w/\text{cn}w, \quad \text{sd}w = \text{sn}w/\text{dn}w. \quad (\text{B.23})$$

En el límite, cuando $k \rightarrow 0$ se tiene que $\text{sc}w \rightarrow \tan w$.

Las derivadas de las funciones elípticas primitivas (cf. ecuación (B.9)) de Jacobi están dadas por

$$\frac{d}{dw} \operatorname{sn} w = \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w, \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{d}{dw} \operatorname{cn} w = -\operatorname{sn} w \operatorname{dn} w, \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{d}{dw} \operatorname{dn} w = -k^2 \operatorname{sn} w \operatorname{cn} w. \quad (\text{B.26})$$

Es posible encontrar el desarrollo en serie de estas funciones alrededor de cero, el cual está dado por

$$\operatorname{sn} w = w - \frac{1}{3!}(1+k^2)w^3 + \frac{1}{5!}(1+14k^2+k^4)w^5 - \dots, \quad (\text{B.27})$$

$$\operatorname{cn} w = 1 - \frac{1}{2!}w^2 + \frac{1}{4!}(1+4k^2)w^4 - \dots, \quad (\text{B.28})$$

$$\operatorname{dn} w = 1 - \frac{1}{2!}k^2w^2 + \frac{1}{4!}(4k^2+k^4)w^4 - \dots. \quad (\text{B.29})$$

$$(\text{B.30})$$

Finalmente se mencionan algunas integrales representativas de las funciones elípticas de Jacobi:

$$\int \operatorname{sn} w = \frac{1}{k} \ln(\operatorname{dn} w - k \operatorname{cn} w), \quad (\text{B.31})$$

$$\int \operatorname{cn} w = \frac{1}{k} \sin^{-1}(k \operatorname{sn} w), \quad (\text{B.32})$$

$$\int \operatorname{dn} w = \sin^{-1}(k \operatorname{sn} w). \quad (\text{B.33})$$

§C. Ecuación de Bernoulli en presencia de campos gravitacionales intensos

En el caso de flujo adiabático en un espacio-tiempo estático, cuando se consideran campos gravitacionales intensos, la ecuación de Euler está dada por la relación (3.19).

Bajo la suposición de que el flujo es estacionario, la componente temporal de esta ecuación es

$$\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \text{grad} \left(\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} \right) = \frac{w}{n} u^\beta u_\alpha \Gamma_{0\beta}^\alpha. \quad (\text{C.34})$$

Debido a que los símbolos de Christoffel están dados por (cf. Chandrasekhar (1983))

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{g^{\gamma\sigma}}{2} \{g_{\alpha\sigma, \beta} + g_{\beta\sigma, \alpha} - g_{\alpha\beta, \sigma}\}, \quad (\text{C.35})$$

entonces

$$\Gamma_{0\beta}^\alpha = \frac{1}{2} \{g^{\alpha 0} g_{00, \beta} - g^{\alpha\mu} g_{0\beta, \mu}\}, \quad (\text{C.36})$$

y por tanto al sustituir esta relación en la ecuación (C.34) y expandir los índices se obtiene

$$\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \text{grad} \left(\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} \right) = \frac{w}{2n} \left(u^\beta u_0 g^{00} g_{00, \beta} - u^\mu u^0 g_{00, \mu} \right). \quad (\text{C.37})$$

Dado que $u^0 = g^{00} u_0$ entonces la ecuación previa toma la forma

$$\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \text{grad} \left(\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} \right) = 0. \quad (\text{C.38})$$

Esta ecuación implica que

$$\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} = \text{const.}, \quad (\text{C.39})$$

a lo largo de cada línea de corriente. Cuando $c \rightarrow \infty$, en el límite newtoniano se obtiene que (Mendoza, 2003)

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{00}} &= 1 + \phi/c^2, \\ mn &= \rho - \rho v^2/2c^2, \\ w = e + p &\rightarrow \rho c^2 + \rho \varepsilon + p, \\ \gamma &= 1 + v^2/2c^2, \quad \text{y} \\ w/n &= mc^2 + w_{\text{non-rel}}, \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

donde ϕ es el potencial gravitacional. De esta manera, la ecuación generalizada de Bernoulli (C.39) converge a

$$\frac{v^2}{2} + \phi + w_{\text{non-rel}} = \text{const.} \quad (\text{C.41})$$

Esta ecuación es la versión no-relativista de la integral de Bernoulli.

§D. Modelo de acreción relativista con rotación

La ecuación de movimiento para una partícula que cae sobre un agujero de Schwarzschild describiendo una órbita cuya contraparte newtoniana es una parábola está dada por la ecuación (4.28).

Suficientemente lejos del agujero, la partícula tiene un momento angular específico h_∞ , el cual está relacionado con el momento angular normal al plano de la trayectoria mediante la relación (4.24)

Por otro lado, en el espacio-tiempo de Schwarzschild la velocidad de una partícula está dada por

$$v^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{rd\theta}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{r \sin \theta d\varphi}{d\tau}\right)^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2, \quad (\text{D.42})$$

donde τ es el tiempo propio. Al emplear (D.42), (4.24) y la ecuación (4.28) se encuentra fácilmente la velocidad azimutal v_φ . A partir de ésta y sabiendo que la velocidad de una partícula está relacionada con la energía específica mediante la relación $E^2 = (1 - r_s/r)(1 - v^2)^{-1}$ (cf. Frolov & Novikov (1998)), entonces debido a que la partícula cae libremente sobre el agujero la energía específica $E^2 = 1$ de lo cual se sigue que la velocidad de la partícula está dada por

$$v^2 = \frac{2M}{r}. \quad (\text{D.43})$$

Es importante hacer notar que esta velocidad coincide con su contraparte newtoniana (Frolov & Novikov, 1998). Con base en estas consideraciones se tiene que el campo de velocidades toma la forma

$$v_r = -2r^{-1/2}\beta \frac{\text{cn}\beta\theta \text{sn}\beta\theta \text{dn}\beta\theta}{\sin \theta} f_1^{1/2}(\theta, \theta_0, v_2, \beta), \quad (\text{D.44})$$

$$v_\theta = r^{-1/2} \frac{\text{cn}^2\theta_0\beta - \text{cn}^2\theta\beta}{\sin \theta} f_1^{1/2}(\theta, \theta_0, v_2, \beta), \quad (\text{D.45})$$

$$v_\varphi = r^{-1/2} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \left(\frac{v_2 (\operatorname{cn}^2 \theta_0 \beta - \operatorname{cn}^2 \theta \beta)}{2 \operatorname{cn}^2 \theta_0 \beta - 1} \right)^{1/2}, \quad (\text{D.46})$$

En donde las funciones $f_1(\theta, \theta_0, v_2, \beta)$ y $f_2(\theta, \theta_0, v_2, \beta)$ están dadas por

$$f_1(\theta, \theta_0, v_2, \beta) := \frac{2 \sin^2 \theta (2 \operatorname{cn}^2 \theta_0 \beta - 1) - v_2 \sin^2 \theta (\operatorname{cn}^2 \theta_0 \beta - \operatorname{cn}^2 \theta \beta)}{(2 \operatorname{cn}^2 \theta_0 \beta - 1) \{ (\operatorname{cn}^2 \theta_0 \beta - \operatorname{cn}^2 \theta \beta)^2 + (2 \beta \operatorname{cn} \beta \theta \operatorname{sn} \beta \theta \operatorname{dn} \beta \theta)^2 \}}$$

$$f_2(\theta, \theta_0, v_2, \beta) := \beta \operatorname{cn} \beta \theta_0 \operatorname{sn} \beta \theta_0 \operatorname{dn} \beta \theta_0 + \{ \sin \theta_0 \cos \theta_0 (2 \operatorname{cn}^2 \theta_0 \beta - 1) - 2 \beta \operatorname{cn} \beta \theta_0 \operatorname{sn} \beta \theta_0 \operatorname{dn} \beta \theta_0 \sin^2 \theta_0 \} / v_2 r.$$

Para encontrar la solución completa a estas ecuaciones es necesario resolver la ecuación (4.28). Dado que no se cuenta con una solución analítica a esta ecuación como sucede en el caso de Ulrich, es necesario resolverla numéricamente teniendo presente que para $r \gg 1$ la solución debe converger a la primera solución de (A.3).

Para encontrar el campo de densidades se emplea la conservación del número de partículas en su versión covariante, dada por la primera relación de la ecuación (3.11).

Dado que el flujo es estacionario, esta ecuación toma la forma

$$(\sqrt{-g} n^k)_{,k} = 0. \quad (\text{D.47})$$

Si ahora se toma un tubo de corriente con uno de sus extremos en infinito, el teorema de la divergencia implica

$$n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \Big|_{r=r_\infty} = n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \Big|_r. \quad (\text{D.48})$$

Tal como sucede en los modelos de acreción newtonianos, el material se acreta hacia el agujero de manera uniforme y constante en el tiempo (Mendoza, 2003), i.e.

$$\dot{M} = 4\pi n_\infty v_r r_\infty^2 = \text{const.}, \quad (\text{D.49})$$

donde \dot{M} es la tasa de acreción.

Por otro lado, para un *radio fijo* la ecuación (4.28) implica que

$$r (-2\beta \operatorname{cn}\beta\theta_0 \operatorname{sn}\beta\theta_0 \operatorname{dn}\beta\theta_0 d\theta_0 + 2\beta \operatorname{cn}\beta\theta \operatorname{sn}\beta\theta \operatorname{dn}\beta\theta d\theta) =$$

$$(2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 (2\operatorname{cn}^2\beta\theta_0 - 1)d\theta_0 - 4\beta \operatorname{cn}\beta\theta_0 \operatorname{sn}\beta\theta_0 \operatorname{dn}\beta\theta_0 \sin^2 \theta_0 d\theta_0) / v_2. \quad (\text{D.50})$$

La sustitución directa de las ecuaciones (D.49) y (D.50) en la relación (D.48) implica que la densidad del número de partículas como función de la posición, adimensionalizada de manera adecuada (cf. ecuación (4.27)), está dada por

$$n = \frac{r^{-3/2} \sin \theta_0}{2f_1^{1/2}(\theta, \theta_0, v_2, \beta) f_2(\theta, \theta_0, v_2, \beta)}. \quad (\text{D.51})$$

Bibliografía

- BELOBORODOV, A. & ILLARIONOV, A., 2000. Small - Scale Inviscid Accretion Discs. *Bulletin of The American Astronomical Society*, **32**, 1247–+.
- BONDI, H., 1952. On spherically symmetrical accretion. *MNRAS*, **112**, 195+.
- BONDI, H. & HOYLE, F., 1944. On the mechanism of accretion by stars. *MNRAS*.
- CAYLEY, A., 1961. *An elementary treatise on elliptic functions*. New York : Dover, 1961.
- CHANDRASEKHAR, S., 1983. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University.
- EDGAR, R., 2004. A review of Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion. *New Astronomy Review*, **48**, 843–859.
- FRANK, J., KING, A. & RAINE, D., 2002. *Accretion Power in Astrophysics*. CUP, 3rd ed.
- FROLOV, V. P. & NOVIKOV, I. D., 1998. *Black Hole Physics. Basic Concepts and New Developments*. Kluwer Academic.
- HANCOCK, H., 1917. *Elliptic Integrals*. New York : Dover, 1917.
- HOYLE, F. & LYTTLETON, A., 1939. The effect of interstellar matter on climatic variation. *PCPS*.
- LANDAU, L. & LIFSHITZ, E., 1994a. *The Classical Theory of Fields*, vol. 2 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon, 4th ed.
- LANDAU, L. & LIFSHITZ, E., 1994b. *Mechanics*, vol. 1 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon, 4th ed.

- LANDAU, L. & LIFSHITZ, E., 1995. *Fluid Mechanics*, vol. 6 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon, 2nd ed.
- LAWDEN, D. F., 1989. *Elliptic Functions and Applications*. Springer.
- LEE, W. & RAMIREZ-RUIZ, E., 2006. Accretion Modes in Collapsars - Prospects for GRB Production. *APJ*.
- MARTIN, J. L., 1988. *General Relativity: A guide to its consequences for gravity and cosmology*. Halsted.
- MENDOZA, S., 2003. *Astrofísica Relativista*. <http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/gravitacion>.
- MENDOZA, S., CANTÓ, J. & RAGA, A. C., 2004. Hydrodynamical Interaction between an Accretion Flow and a Stellar Wind. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, **40**, 147–165.
- MICHEL, F. C., 1972. Accretion of matter by condensed objects. *ASS*, **15**, 153–160.
- MISNER, C. W., THORNE, K. S. & WHEELER, J. A., 1973. *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1973.
- NAMIAS, V., 1984. Simple derivation of the roots of a cubic equation. *Am. J. Phys.*, **53**, 775.
- ULRICH, R. K., 1976. An infall model for the T Tauri phenomenon. *APJ*, **210**, 377–391.
- WALD, R., 1984. *General Relativity*. University of Chicago.