Funciones de Jacobi en la astrofísica relativista.

SERGIO MENDOZA <sergio@mendozza.org>
http://www.mendozza.org/sergio
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO (UNAM)

Plática disponible en
http://www.mendozza.org/sergio/talks

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma de México
MAYO 20, 2010

Colaboradores

- Eliu A. Huerta (Universidad de Cambridge, Reino Unido)
- Emilio Telejeda (SISSA, Italia)
- Alejandro Becerril (UNAM)

1 Resumen

- ☆ Problema de Kepler
- ☆ Acreción hacia una estrella recien formada
- ☆ Problema de Kepler en Relatividad General
- ☆ Funciones elípticas de Jacobi
- ☆ Soluciones y futuro

Carl Gustav Jacob Jacobi (December 10, 1804 February 18, 1851) was a Prussian mathematician, widely considered to be the most inspiring teacher of his time and one of the greatest mathematicians of all time (wikipedia.org)

2 Problema de Kepler

☆ Lagrangiano para una partícula libre con campo gravitacional central:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - G\frac{Mm}{r} \tag{1}$$

☆ Lagrangiano no depende del tiempo t $\Rightarrow$ energía es constante.

☆ En esféricas, el Lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) - G\frac{Mm}{r} \tag{2}$$

Como $\partial L/\partial\varphi = 0 \Rightarrow$ momento angular $\boldsymbol{l}$ es constante, y como $\boldsymbol{l} = m\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{const.} \Rightarrow$ movimiento se lleva acabo en un plano.

☆ Escogiendo el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, el lagrangiano se simplifica considerablemente, con $\boldsymbol{l} = mr\dot{\varphi}^2\boldsymbol{e}_\varphi$.

☆ La ecuación de movimiento se obtiene mediante la variación directa de la acción $\delta\int L\mathrm{d}t$ o de las Ecuaciones de Lagrange.

- ☆ Ecuación de movimiento:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\varphi})^2 - \frac{GMm}{r} = E_{\mathrm{tot}} = const, \tag{3}$$

- ☆ De esta relación se sigue directamente que:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{h\mathrm{d}r/r^2}{\sqrt{2(E - GM/r) - h^2/r^2}}, \tag{4}$$

es decir,

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{h/r - GM/h}{\sqrt{\left(2E + G^2M^2/h^2\right)}}\right) + const. \tag{5}$$

- ☆ Haciendo la selección $p = h^2/GM$ y $e = \sqrt{1 + \left(2Eh^2/G^2M^2\right)}$ y escogiendo φ de tal modo que la constante en (8) sea cero se obtiene:

$$r = \frac{p}{1 + ecos\varphi}. \tag{6}$$

- ☆ Esta es la forma de una cónica general. La cantidad $2p$ es el lado recto de la cónica y e su excentricidad. El punto $\varphi = 0$ de máximo acercamiento al centro es el perihelio.

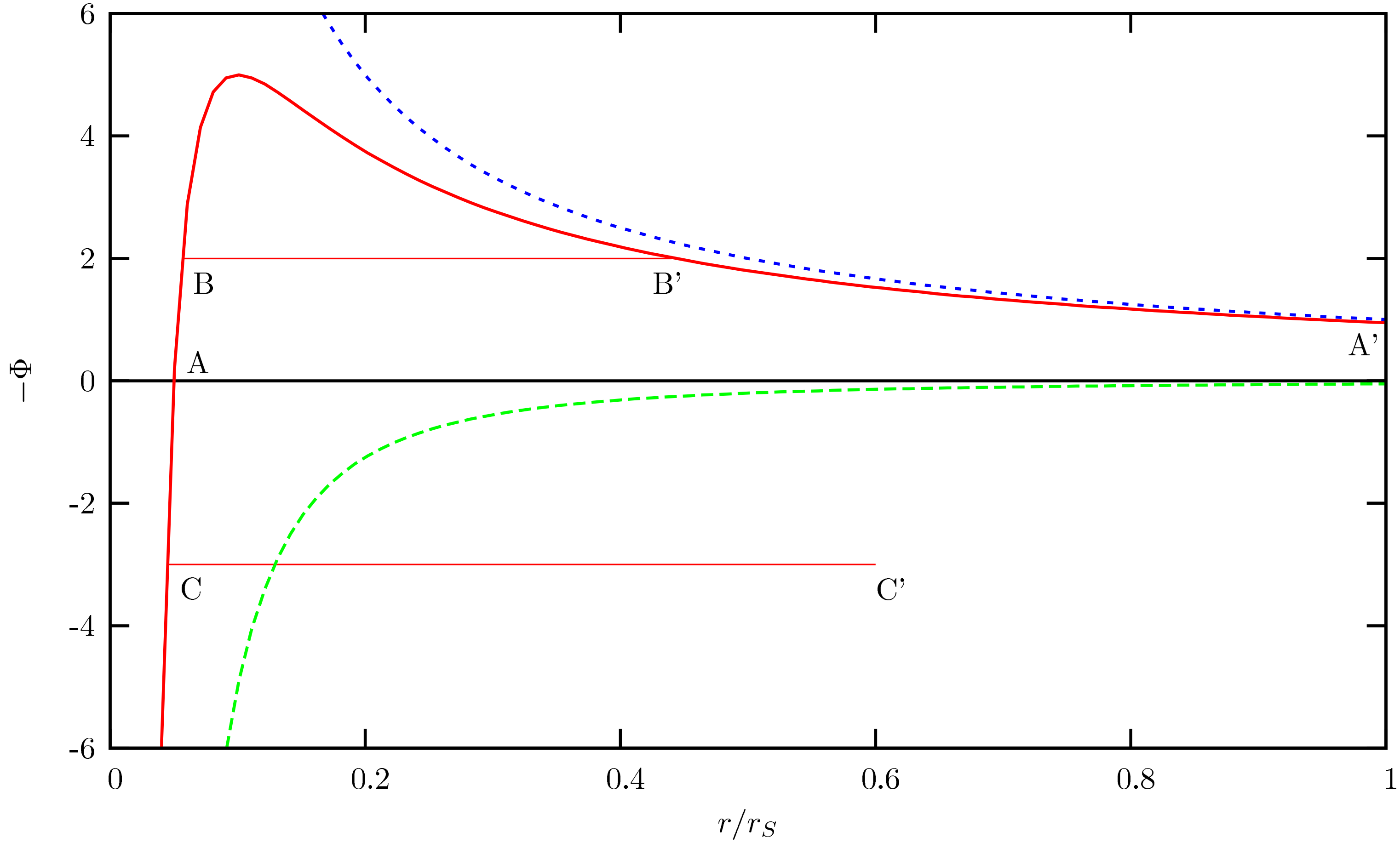
- ☆ Elipses (órbita cerrada) $E < 0 \Rightarrow e < 1$
- ☆ Circunferencias (órbitas cerradas): valor mínimo de energía: $GMm/2h^2 \Rightarrow e = 0$.
- ☆ Hiperbola (órbita abiertas) $E > 0 \Rightarrow e > 1$
- ☆ Parabola (órbita abierta) $E = 0 \Rightarrow e = 1$
- ☆ Una manera gráfica de entender todo esto es reescribiendo la ecuación de movimiento (1) como:

$$m\dot{r}^2 + m\frac{h^2}{r^2} - \frac{2GMm}{r} = m\dot{r}_\infty^2, \tag{7}$$

que puede ser reescrita como:

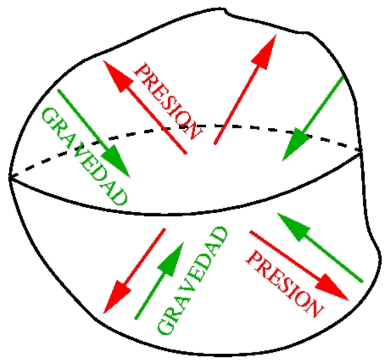
$$\dot{r}^2 = -\mathsf{c}^2 \left\{ \frac{\eta}{(r/r_\mathrm{S})^2} - \frac{1}{(r/r_\mathrm{S})} \right\} + \dot{r}_\infty^2, \tag{8}$$

donde $r_\mathrm{S} = 2GM/\mathsf{c}^2$ & $\eta := h^2/r_\mathrm{S}^2\mathsf{c}^2$, con $h = r\dot{\varphi}^2$ el momento angular específico de la partícula de prueba.


6
4
2
0
-2
-4
-6
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$-\Phi$
r/r_S
A
A'
B
B'
C
C'

3 Colapso gravitacional

- *Equilibrio hidrostático* es el equilibrio *mecánico* (balance de fuerzas) entre la presión de un objeto gaseoso (como una estrella) y su *gravedad propia*

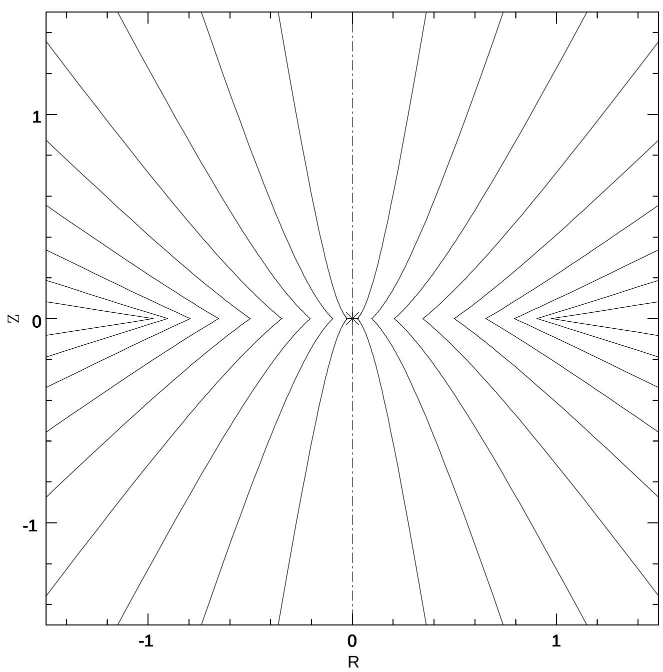


Nebulosa gigante de la *laguna* (m8). Tamaño $\sim 140 \times 160$ años luz.

- Fza de presión > Fza de gravedad ⇒ Expansión de la nube
- Fza de gravedad > Fza de presión ⇒ Colapso gravitacional de la nube ⇒ formación de estrellas. ⇒ *Criterio de Jeans de estabilidad gravitacional*.
- ¿Cuantas estrellas se forman de un colapso gravitacional? ¿Detalles del colapso? ***No** lo sabemos.* Lo único que podemos decir (gracias a las observaciones) es que probablemente se forme más de una estrella cuando se produce un colapso gravitacional.

4 Acreción con rotación hacia un objeto central

- ☆ Fórmula: objeto gravitacional compacto sumergido en gas
- ☆ Acreción esférica (Bondi–Hoyle). Gas cae de manera rectilínea hacia un objeto condensado (estrella o agujero negro).
- ☆ Acreción + rotación ⇒ *disco de acreción*



- ☆ Acreción en línea: materia de una estrella es gravitacionalmente capturado por una compañera.

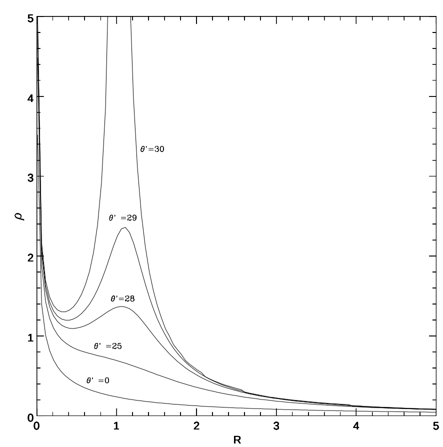
☆ Parametros del problema: G, r_0, h_∞, M, ρ_∞, p_∞, c y κ. Por lo tanto:

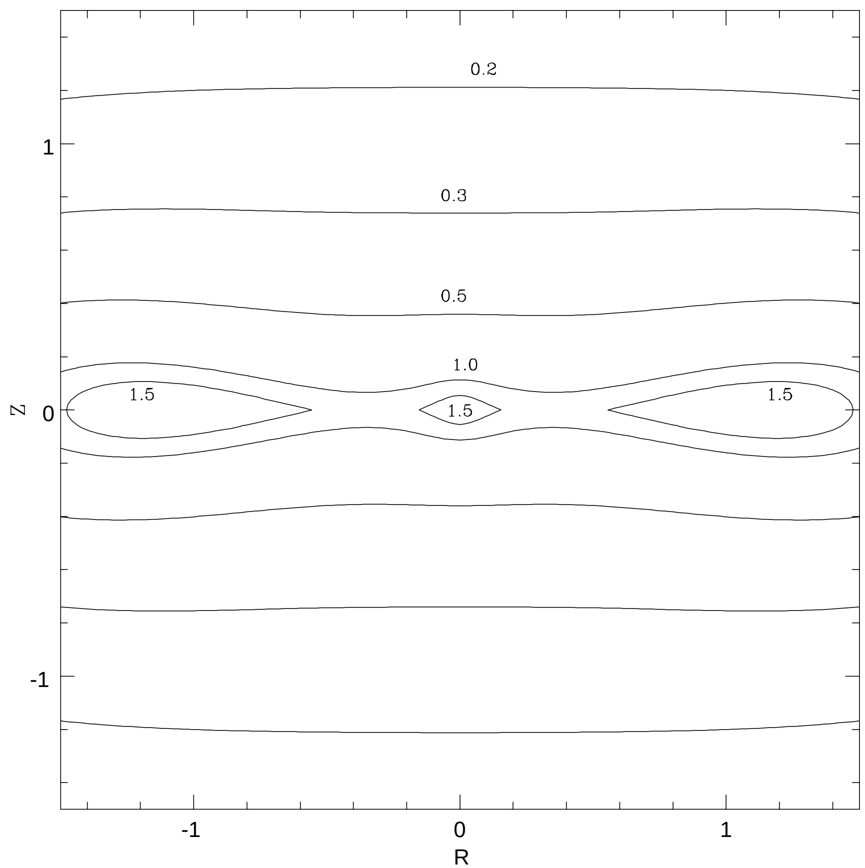
$$\delta = \frac{r_0 c^2}{GM}, \qquad \epsilon = \left(\frac{\Gamma_\infty c}{GM}\right)^2, \tag{9}$$

☆ Disco ecuatorial se forma cuando fuerza centrifuga ($\sim h^2/r^3$) es balanceada por la fuerza gravitacional $\sim GM/r^2$, i.e.:

$$r_\mathrm{d} = \epsilon r_c \tag{10}$$

y $r_c = GM/c^2$ es el radio al cual el material es supersónico.




0.2
0.3
0.5
1.0
1.5
1.5
1.5
1
0
-1
Z
-1
0
1
R

5 Modelo relativista: espacio-tiempo de Schwarzschild

☆ Métrica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r\mathsf{c}^2}\right)\mathsf{c}^2 dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - 2GM/r\mathsf{c}^2)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (11)$$

☆ Acción para partícula libre:

$$S = -m\mathsf{c}\int_a^b ds, \qquad (\delta S = 0)\,. \quad (12)$$

☆ ds no depende del tiempo ni del ángulo $\varphi \Rightarrow$ energía $\kappa = \alpha\dot{t}$ (con $\alpha := (1 - 2r_S/r)$ y $h = r^2\dot{\varphi}$ son constantes de movimiento. Aquí ya se escogió $\theta = \pi/2$ que simplifica enormemente los cálculos.

☆ Ecuación de movimiento:

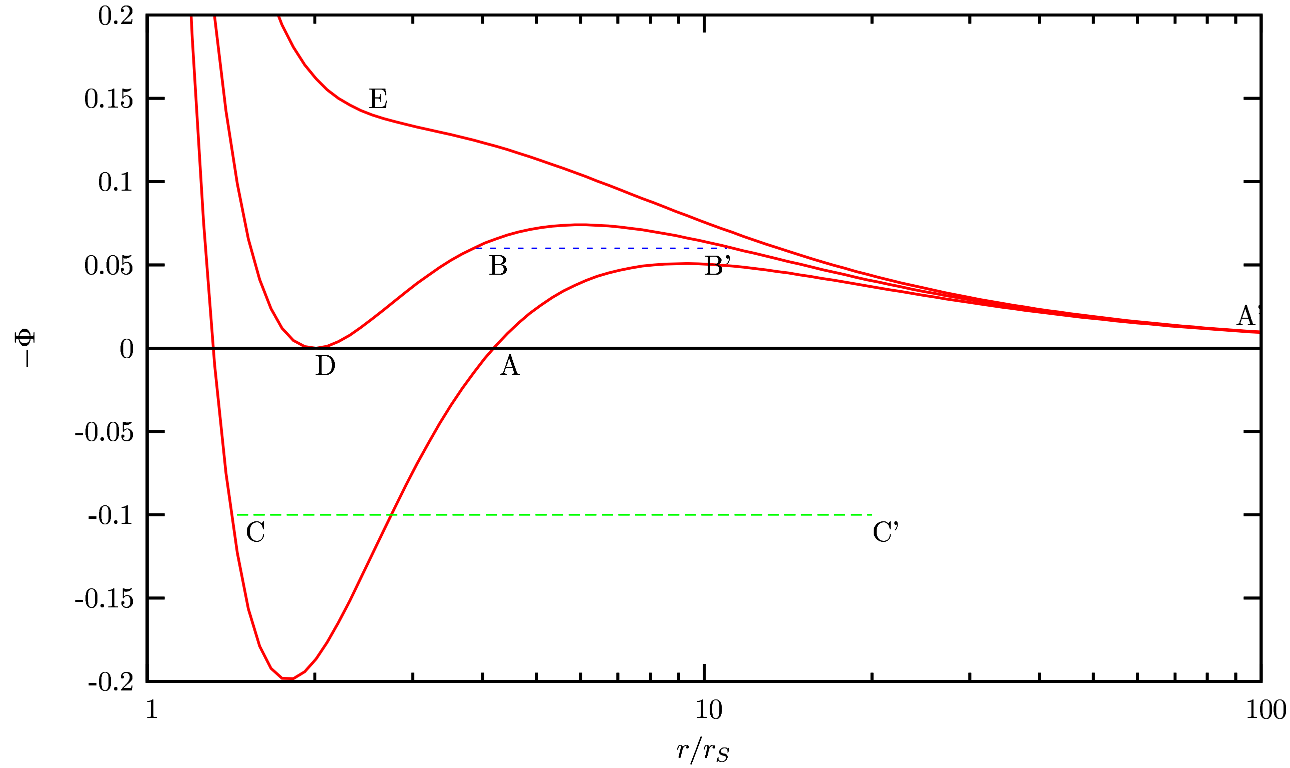
$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\alpha(r\dot{\varphi})^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{m\mathsf{c}^2}{2}(k^2 - 1). \quad (13)$$

o bien:

$$m\dot{r}^2 + m\frac{h^2}{r^2} - \frac{2GMm}{r} - \frac{2GMmh^2}{r^3\mathsf{c}^2} = m\mathsf{c}^2(k^2 - 1). \tag{14}$$

☆ Igual que antes podemos reescribir esta última relación como:

$$\dot{r}^2 - \mathsf{c}^2(k^2 - 1) = -\mathsf{c}^2 \left\{ \frac{\eta}{(r/r_{\rm S})^2} - \frac{1}{(r/r_{\rm S})} - \frac{\eta}{(r/r_{\rm S})^3} \right\} \tag{15}$$


0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
$-\Phi$
1
10
100
r/r_S
E
B
B'
A'
D
A
C
C'

☆ En principio la ecuación de movimiento es integrable en el espacio de Schwarzschild:

$$\varepsilon = \nu^2 + \mu^2 f(i)^2 (1 - \mu\gamma) - 2\mu. \tag{16}$$

En donde:

$$\mu^2 := \frac{h_0^2}{r_0^2 E_u} = \frac{r_u^2}{r_0^2}, \qquad \nu^2 := \frac{v_{r_0}^2}{E_u}, \qquad \gamma := \frac{r_s}{r_u}, h = h_0 f(i). \tag{17}$$

Así pues:

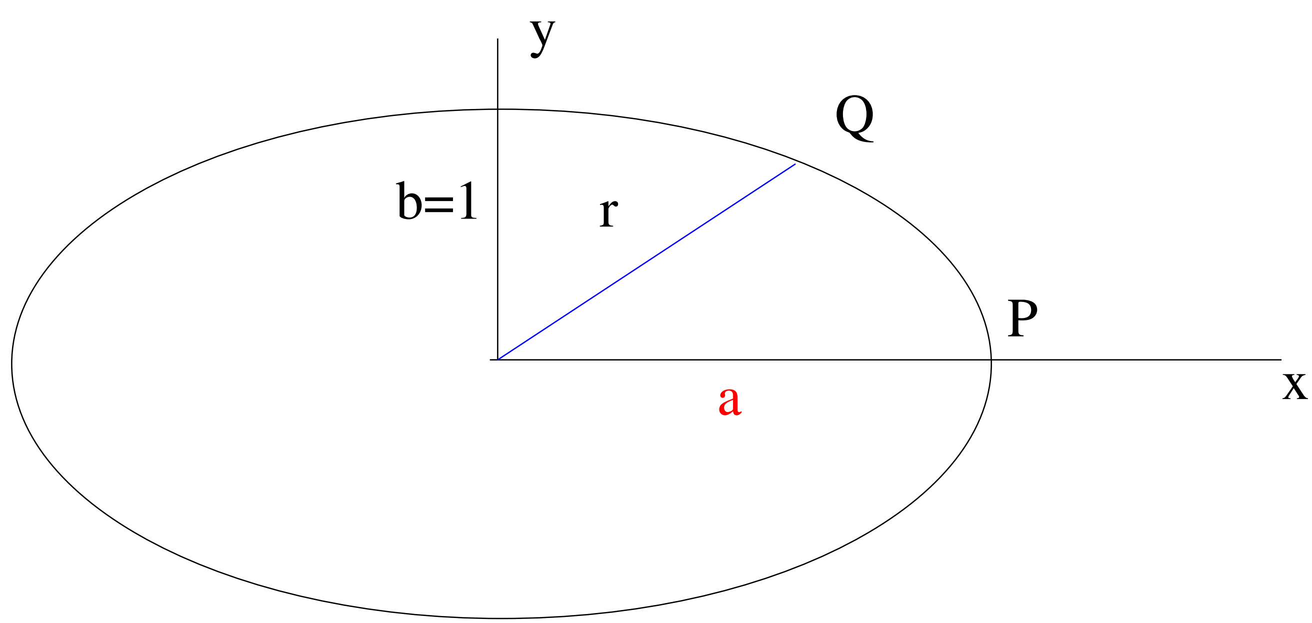
$$\int_\alpha^r \frac{\mathrm{d}u}{|P(u)|^{1/2}} = \frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{f(i)}\phi, \tag{18}$$

con

$$P(r) = r\left[r^3 + \frac{2}{\varepsilon}r^2 - \frac{f(i)^2}{\varepsilon}(r - \gamma)\right]. \tag{19}$$

☆ La relación (18) es una integral elíptica del primer tipo. Normalmente uno dice: OK, de aqui para adelante todo numériico..

6 Breve repaso de funciones de Jacobi



$$(x/a)^2 + y^2 = 1 \qquad \& \qquad x^2 + y^2 = r^2 \tag{20}$$

$$b^2/a^2 = 1 - e^2 \Rightarrow k := e = \sqrt{(1 - 1/a^2)} = \text{módulo} \tag{21}$$

$$\text{argumento} = u := \int_P^Q r \mathrm{d}\theta. \tag{22}$$

☆ Definimos:

$$sn(u,k) = y, cn(u,k) = x/a, dn(u,k) = r/a \tag{23}$$

☆ De aquí se sigue que:

$$cn^2(u,k) + sn^2(u,k) = 1, \qquad dn^2(u,k) + k^2 sn^2(u,k) = 1. \tag{24}$$

☆ Relaciones diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} sn(u) = cn\, u\, dn\, u, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} cn(u) = -sn\, u\, dn\, u, \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} dn(u) = -k^2 sn\, u\, cn\, u. \tag{27}$$

☆ Si $\xi(u) = sn(u)$ entonces:

$$u = \mathrm{const} + \int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-k^2\xi}}, \tag{28}$$

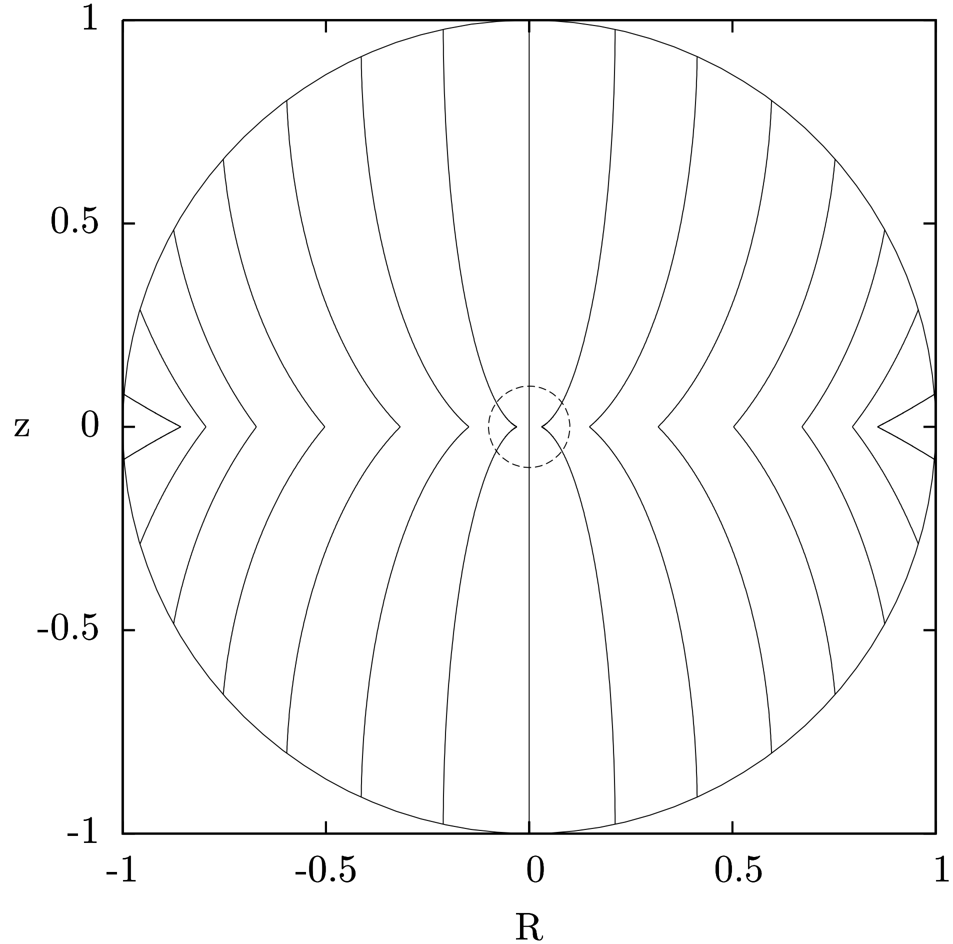
i.e. una integral elíptica del primer Tipo $F(k,\xi)$.

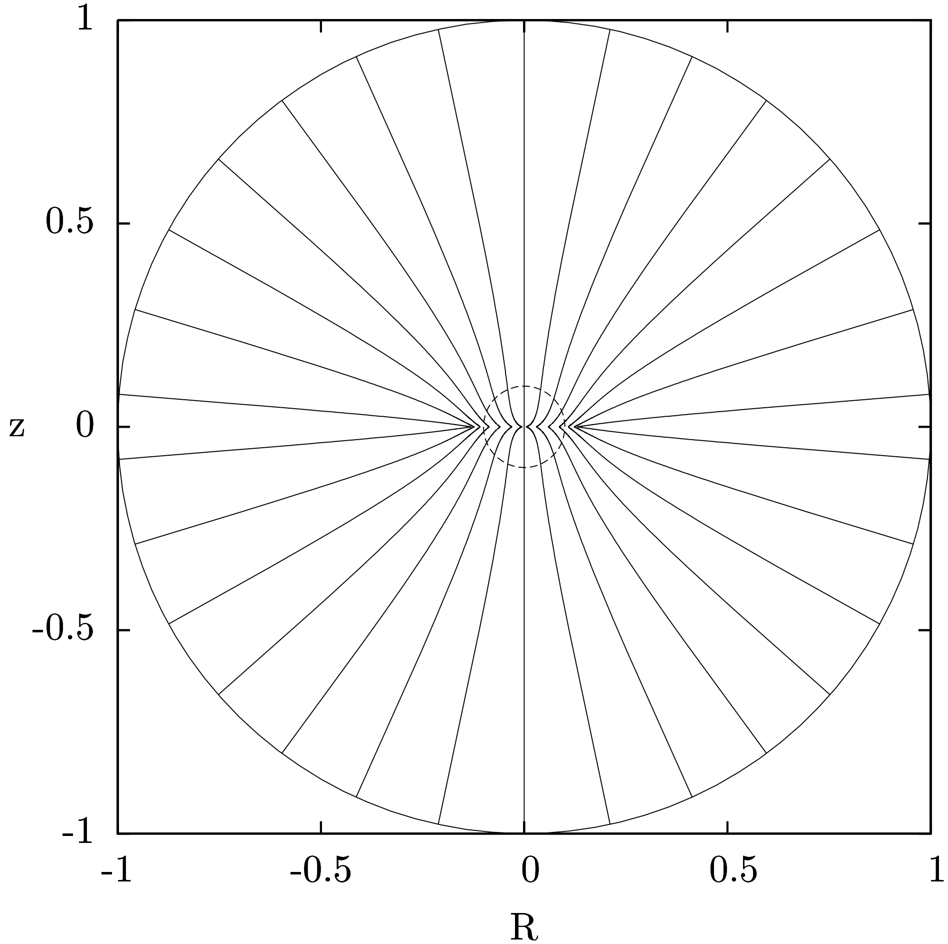
☆ Con esto el problema de Kepler en relatividad general puede ser integrado de forma analítica para el espacio de Schwarzschild.

$$\int_{r_2}^{r} \frac{\mathrm{d}u}{|P(u)|^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{r_2(r_3 - r_1)}}\, cn^{-1}\left(\frac{(r_2 - r_1)(r_3 - r)}{(r_3 - r_2)(r - r_1)}\right)^{1/2}, \qquad (29)$$

(este caso es para cuando $r_2 < r < r_3$

☆ La "GNU Scientific Library" (gsl) tiene estas funciones predeterminadas, así es que funciona como una calculadora en C para hacer trayectorias.


1
0.5
z
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
R


1
0.5
0
-0.5
-1
z
-1
-0.5
0
0.5
1
R

7 Conclusiones

- ✰ Revisen la bibliografía para que vean lo elegante que es escribir todo en términos de funciones de Jacobi
- ✰ No hay que tener miedo a las integrales elípticas (sobre todo a las del primer tipo).
- ✰ Estos trabajos han sido hechos todos con alumnos de licenciatura de la Facultad de Ciencias (Eliu Huerta & Emilio Tejeda). Ellos han publicado sus resultados en revistas internacionales astronómicas.
- ✰ Con Alejandro Becerril estamos analizando el espacio-tiempo de Kerr y no parece que existan soluciones analíticas, pero no importa, la solución numérica no es muy compleja.
- ✰ E. Tejeda se encuentra haciendo un código SPH que va a ser probado por default con estos modelos para complicarlos hidrodinámicamente.

"Nunca pensé que el problema de acreción esférica fuera mas que una curiosidad matemática" H. Bondi