Interacción Hidrodinámica entre un Viento Estelar y un Flujo de Acreción

Sergio Mendoza

Instituto de Astronomía

and

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma

México

Tesis presentada para obtener el grado de Físico en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Agosto, 1995

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Agradecimientos

Hace poco más de cuatro años que mi vida cambió por completo. Jamás había tenido la intención, ni la más profunda sensación de vivir solo. Quizás si hubiese sabido a todas las carencias que me enfrentaría y los problemas que me acogerían, jamás lo hubiera intentado. No obstante, con el paso del tiempo se aprende que la felicidad es gratis y fiel compañera de todos los días.

Deseo agradecer profundamente a la casualidad que la vida me otorgó al haberme puesto en un hogar maravilloso al nacer, el cual recuerdo ahora de manera nostálgica. Sin el apoyo en todo sentido de mis padres y hermanos, el placer cotidiano de vivir sería simple monotonía. Es difícil imaginar cómo sería el andar cotidiano sin recordar su comprensión, su apoyo inmenso y su amor. Gracias a mis padres, hermanos y abuela por compartir y dedicar gran parte de sus vidas conmigo y por darme aliento para la ardua tarea de caminar hacia la perspectiva de un nuevo día; de verdad serán inolvidables.

Los sabios consejos de Jorge Cantó, director de Tesis, quien ha venido guiando desde hace un año mi formación no solamente académica, sino como persona, sin lugar a duda me han dado lugar a ver en la Naturaleza esa combinación de complejidad y sencillez que a la vez se presenta. De gran aprendizaje resultó para mi que la realización de esta Tesis no haya tenido resultados inmediatos; muy por el contrario, en ocasiones no encontraba la llave mágica que abre las puertas hacia el camino de las soluciones. Quiero enfatizar mi agradecimiento hacia Jorge Cantó por tener la paciencia ante mis dudas de novato y por escuchar atentamente los problemas que a lo largo de esta Tesis surgieron. Gracias también a Alejandro Raga, co-director de Tesis, quién propuso varios métodos sofisticados y a la vez artísticos en la parte computacional de este trabajo.

Sin lugar a duda este trabajo no pudo haberse realizado sin la formación que recibí durante cuatro años en la Facultad de Ciencias (U.N.A.M.). Gracias a todos los maestros que contribuyeron realmente en mi formación, en especial a Eugenio Ley-Koo por todos sus consejos, sus formadibles clases, su paciencia y su amistad como persona. Quiero agradecer también a Susana Lizano, Luis F. Rodríguez, Enrique Vázquez y Manuel Peimbert por su apoyo, sus consejos y sugerencias para mi formación. Agradezco profundamente al Instituto de Astronomía y todo su personal por las facilidades brindadas para la realización de esta Tesis. De la misma forma a Alberto Garcia (el artista) por contribuir con los dibujos complicados en esta Tesis y a la gente de cómputo de esta institución. Gracias intensamente a mi Padre y a Rafael Martínez por haberme introducido al fascinante mundo de la física desde pequeño.

Gracias a la amistad brindada, las sugerencias y contribuciones que para este trabajo hicieron Paola D'alessio y Javier Ballesteros pues resultaron de gran utilidad. Quiero dar las gracias a la gente que revisó con paciencia este trabajo, mis sinodales: Jorge Cantó, Alejandro Raga, Ramón Peralta, Eduardo Ramos y Julio Martinell.

Será difícil olvidar los maravillosos momentos de las comidas en el Instituto de Astronomía a las tres de la tarde. Gracias a Antígona Segura, Margarita Sevilla, Maru Contreras, Sandra Ayala, Elizabeth Themsel, Sonia López, Juan Vázquez, Alberto Nigoche, Pepe Bañuelos, Mauricio Argote y todos los que aparecian de manera espontanea por haber compartido esos formidables momentos.

Agradezco a Maru Contreras y Sandra Ayala por su sincera amistad y por compartir conmigo muy agradables instantes. Como olvidar la sonrisa, el entusiasmo y el apoyo de Juan Vázquez (que en paz descanse), presente en mi pensamiento. Gracias también en todo sentido a Mauricio Argote por su inmenso apoyo para la realización de esta Tesis y por su grandiosa y verdadera amistad.

Dos grandes amigos, Ernesto Guzmán y Bjørn Nielsen, aunque lejos por el momento apoyaron moralmente este trabajo. No olvidaré la interpretación que hizo Bjørn con las cuatro primeras letras mayúsculas del título de esta Tesis (IHVE)..... Gracias a Enrique Loubet por su intachable carácter, por su apoyo y por su amistad. Del mismo modo a Enrique Moreno por esas amplias discusiones en física y por compartir una gran amistad. Igualmente gracias a Dalia Amor Conde y Fam., Andy Alcaraz y Fam., Mónica Hochstein, Carlos Román, al siempre igual Rodrigo Ordoñez, Erika Benitez y René Carrillo por su amistad y su inmenso apoyo. Agradezco a Iqui Fuentes, que a pesar de tantos disturbios, la amistad y el apoyo mutuo no han cesado.

Quiero agradecer muy especialmente a Vanesa Magar, mi querida flaca, que durante bastante tiempo tuvo la paciencia suficiente para apoyarme profundamente, para darme su comprensión, su cariño y su amor. Gracias por hacer de esos momentos un verdadero vivir.

Por último quiero dar las gracias a todos aquellos que me han devuelto una sonrisa, a todos aquellos que me ofrecieron un pan en tiempos difíciles, a todos aquellos que han puesto de su parte para que el trajín diario sea más llevadero y muy en especial a la vida que, como dijera Violeta Parra, me ha dado tanto.....

Con cariño inmenso
a mis padres,
hermanos
y a la mujer
de los 22

Introducción

La forma estacionaria en la que se acreta material proveniente de una gran nube de gas hacia una estrella inmersa en esta misma fue primeramente analizada por Bondi (1952). Bondi consideró que la nube (la cual puede considerarse infinitamente extensa) en su estado incial estaba en reposo con respecto a la estrella. Es claro entonces, que las cantidades hidrodinámicas poseen simetría esférica. Resulta además que para distancias (medidas desde el centro de la estrella) menores que un cierto valor, el flujo es supersónico.

Todas las estrellas, en particular las estrellas recién formadas, arrojan material con velocidades supersónicas (llamado viento estelar). La interacción entre el flujo de acreción descrito por Bondi y el viento estelar produce dos choques hidrodinámicos (un choque para cada flujo) debido a que un flujo resulta ser un obstáculo para el otro y viceversa. Gracias a la simetría del problema, la forma geométrica de estas superficies de discontinuidad es esférica.

Ulrich (1976) modificó ligeramente el modelo de Bondi suponiendo que la nube de gas gira lentamente alrededor de un eje que pasa por el centro de la estrella. Como veremos más adelante, sus resultados muestran que en este caso el flujo de acreción posee simetría cilíndrica. Dado que el modelo rotacional de Ulrich es una pequeña perturbación del modelo no rotacional descrito por Bondi, se espera que para distancias menores que una cierta cantidad, el flujo sea supersónico.

Si consideramos ahora la interacción entre el flujo de acreción rotacional descrito por Ulrich con el flujo del viento estelar, nuevamente por la misma razón que antes, dos choques hidrodinámicos se forman. Es claro que la forma geométrica de estos choques es oblicua y de simétria cilíndrica.

En el trabajo expuesto a continuación analizaremos en detalle la forma geométrica de estos choques, así como la emisión producida por los mismos.

Capítulo I

Acreción en una nube de gas

En este capítulo analizaremos detalladamente el modelo de acreción con rotación descrito por Ulrich (1976). Obtendremos los valores de las cantidades hidrodinámicas (densidad y velocidad) para todo el espacio, las cuales son necesarias para determinar la interacción con el viento estelar.

§1. Modelo de acreción de Ulrich (1976)

Consideremos una estrella (o cualquier otro objeto gravitacional "condensado") de masa M que se encuentra inmersa en una nube de gas (este gas puede considerarse infinitamente extenso). Supongamos además que lejos de la estrella la velocidad del sonido c es constante; la presión y la densidad de la nube, también lejos de la estrella, son uniformes y tienen el valor p_∞ y ρ_∞ respectivamente. Supongamos que lejos de la estrella, el gas gira como un cuerpo rígido, con lo cual, el gas posee una distribución de momento angular específico Γ (momento angular por unidad de masa) alrededor del eje z que pasa por el centro de la estrella y que lejos del eje de rotación tiene el valor constante Γ_∞. Supongamos que la acreción es tan lenta como para que la masa de la estrella M pueda considerarse constante en el proceso de acreción y que el flujo es estacionario.

Supongamos que el gas en acreción obedece una relación politrópica:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^\kappa, \tag{1.1}$$

donde p y ρ representan la presión y la densidad del gas respectivamente y son funciones en general de la posición y κ es el índice politrópico. La suposición de que el gas en acreción cumple con la ec.(1.1) se debe a que la ecuación de energía que considera al enfriamiento es complicada, así es que adjunta a las ecuaciones de momento y conservación de masa, así como la de energía se pide que el gas lleve a cabo un proceso politrópico. De hecho, si $\kappa = 1$ el proceso es isotérmico y si el índice politrópico es igual al cociente de calores específicos del gas, el proceso es adiabático.

Debido a que la tasa de acreción en el flujo descrito por Bondi (1952) es constante y suponiendo que la masa de la estrella es mucho mayor que la masa del gas contenida en una esfera de radio r (r es la distancia de la estrella a la partícula de fluido en cuestión), la gravedad propia del gas es despreciable con respecto la gravedad del objeto central. En lo sucesivo consideraremos que Γ_∞ es lo suficientemente pequeño como para que el flujo de acreción pueda considerarse como una perturbación del modelo no rotacional descrito por Bondi.

El problema en cuestión está caracterizado por los siguientes parámetros: la constante gravitacional G, el radio de la estrella r_0, las constantes Γ_∞, M, ρ_∞, p_∞, c y el índice politrópico κ. Con estas magnitudes pueden construirse tres parámetros adimensionales (sin contar κ) que son:

$$\delta = \frac{r_0 c^2}{GM}, \qquad \epsilon = \left(\frac{\Gamma_\infty c}{GM}\right)^2, \tag{1.2}$$

y $p_\infty/\rho_\infty c^2 \sim 1$. La longitud $r_c = GM/c^2$ es, excepto por una función que depende de κ (la cual resulta ser del orden unidad), la distancia a la que el material alcanza una velocidad sónica en la acreción sin rotación (Bondi 1952). En otras palabras, pedir que $\delta \ll 1$ asegura que el radio del objeto central es pequeño comparado con esta distancia.

El parámetro ϵ puede considerarse como el cociente de la fuerza centrífuga entre la fuerza gravitacional evaluada en el punto r_c. Así pues, pedir que $\epsilon \ll 1$ implica que los efectos rotacionales son pequeñas perturbaciones del flujo descrito por Bondi.

Dado que el momento angular del material en acreción debe conservarse, eventualmente la fuerza centrífuga ($\approx \Gamma^2/r^3$) será comparable a la fuerza gravitacional ($\approx GM/r^2$). Resulta que la distancia a la que esto ocurre es $r_d = \epsilon r_c$, que es justo la distancia a la cual se espera que el flujo se desvíe apreciablemente de la acreción esférica y que un disco de radio r_d sobre el plano ecuatorial se forme†. De aquí en adelante consideraremos al disco como infinitamente delgado, es decir, supondremos que el radio del mismo es mucho más grande que su espesor.

Las estrellas de baja masa y de formación reciente son tales que $r_0 \sim 2R_\odot$, $c \sim 1\mathrm{km\ s^{-1}}$, $M \sim 1M_\odot$, con una velocidad azimutal lejos de la estrella del orden de $\dot{\varphi} \sim 10^{-14}\mathrm{s^{-1}}$, y un tiempo de vida τ entre 10^4años $\lesssim \tau \lesssim 10^5$años. De esta manera el momento angular lejos del eje de rotación es $\Gamma_\infty = (c\tau)^2\dot{\varphi} \sim 9.61 \times 10^{18}\mathrm{cm^2 s^{-1}}$. Con lo anterior se obtiene entonces que, para el caso de estrellas de baja masa y de formación reciente $\delta \sim 1.75 \times 10^{-5} \ll 1$, $\epsilon \sim 0.2 \ll 1$, $r_c \sim 536\mathrm{AU}$ y $r_d \sim 100\mathrm{AU}$.

Al tiempo $\tau = 0$, cuando los efectos gravitacionales de la estrella resultan importantes para la nube de gas, el gas comienza a acretarse. Consideraremos en lo sucesivo que el tiempo τ es lo suficientemente grande como para que $r_c < c\tau$. De esta forma sucede que en la región $r > c\tau$ la nube no está perturbada por los efectos gravitacionales de la estrella. Cuando $r_c < r < c\tau$ el material se encuentra en acreción con velocidad debajo de la del sonido y los efectos de la rotación son poco importantes. Cuando $r_d < r < r_c$ el flujo de acreción es supersónico y también los efectos de la rotación carecen de importancia. Cuando

†Cuando el material en acreción alcanza el plano ecuatorial, dada la simetría del problema, cada partícula colisiona con su contraparte simétrica (Canto et al., 1995); esto ocasiona la formación de un choque hidrodinámico fuerte. Este choque termaliza la componente de velocidad ortogonal al plano ecuatorial. Cuando las partículas de fluido se establecen entonces en el plano ecuatorial son acretadas hacia la estrella produciendo otro choque hidrodinámico fuerte que termaliza la componente radial de la velocidad, conservándose de esta manera el momento angular de la partícula de gas.

$r < r_d$ los efectos de la rotación tienen importancia esencial sobre el comportamiento del gas y el material fluye con velocidad supersónica hacia la estrella.

§2. Cantidades hidrodinámicas en la acreción

Analicemos la trayectoria que seguiría una partícula de fluido en la acreción descrita en la sección §1. Gracias a que los gradientes en la presión y los cambios en la energía interna a lo largo de las líneas de corriente en un flujo supersónico contribuyen poco en los balances de las ecuaciones de energía y momento hidrodinámicas, las líneas de corriente se aproximan a trayectorias balísticas. Si suponemos además que la masa del disco M_d es mucho más pequeña que la masa de la estrella, entonces la trayectoria de una partícula de gas obedece a un potencial central Newtoniano.

La energía total (mecánica e interna) de una partícula al empezar el descenso hacia la estrella y el disco es distinta de cero pues la componente azimutal de la velocidad y la temperatura son distintas de cero. Sin embargo, la energía total es pequeña comparada con su energía potencial y cinética cuando la partícula está cerca del disco. En otras palabras, la energía interna de una partícula cercana al disco contribuye poco al balance de la energía total. Esto es válido siempre y cuando la energía cinética de rotación sea pequeña (es decir $\epsilon \ll 1$) y cuando los calentamientos por radiación sean insignificantes. Por lo tanto, las líneas de corriente cerca del disco deben ser trayectorias con energía cercana a cero, es decir,

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} \approx 0, \tag{2.1}$$

donde E es la energía por unidad de masa de una partícula de gas cercana al disco, y v es su velocidad. Así pues, las líneas de corriente cercanas al disco son parábolas. Sin embargo, sólo son de interés las trayectorias aguas arriba del disco, pues cuando las partículas alcancen el plano $\theta = \pi/2$ (θ el ángulo polar) donde está el disco, las partículas se integran a éste mismo.

La forma explícita de las líneas de corriente, así como del campo de velocidades y la densidad, es la siguiente *(Apéndice* §A*)*:

$$\frac{r}{r_d} = \frac{\sin^2\theta_0}{\left(1 - \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)}, \tag{2.2}$$

$$v_r = -\left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^{1/2}, \tag{2.3}$$

$$v_\theta = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin\theta}\left(1 + \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^{1/2}, \tag{2.4}$$

$$v_\varphi = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^{1/2}\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}, \tag{2.5}$$

$$\rho = \frac{\dot{M}}{4\pi r_d^2\left(\frac{GM}{r_d}\right)^{1/2}}\left(\frac{r}{r_d}\right)^{-3/2}\left(1 + \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^{-1/2}\left\{1 + 2\left(\frac{r}{r_d}\right)^{-1}P_2(\cos\theta_0)\right\}^{-1}, \tag{2.6}$$

donde v_i $(i = r, \theta, \varphi)$, y ρ representan el campo de velocidades y la densidad del material de acreción respectivamente; φ es el ángulo azimutal, θ_0 es el ángulo polar inicial que tiene una partícula de fluido al iniciar su descenso hacia el disco (fig.(I.1)), $\dot{M}$ es la tasa de acreción y $P_2(\xi)$, el polinomio de Legendre de orden dos, definido por:

$$P_2(\xi) = \frac{1}{2}\left(3\xi^2 - 1\right). \tag{2.7}$$

Si hacemos los cambios adimensionales:

$$\frac{r}{r_d} \longrightarrow r\,, \qquad \frac{v_i}{v_k} \longrightarrow v_i, \quad (i = r\,, \theta, \varphi) \qquad \frac{\rho}{\rho_0} \longrightarrow \rho, \tag{2.8}$$

en las ecs.(2.2)-(2.6) donde v_k y ρ_0 están definidos por †:

$$v_k = \left(\frac{GM}{r_d}\right)^{1/2}, \qquad \rho_0 = \frac{\dot{M}}{4\pi r_d^2 v_k}, \tag{2.9}$$

se obtienen las cantidades hidrodinámicas sin dimensiones:

† v_k es la velocidad (velocidad kepleriana) que tiene una partícula bajo la influencia de un campo central Newtoniano en una trayectoria circular a la distancia r_d.

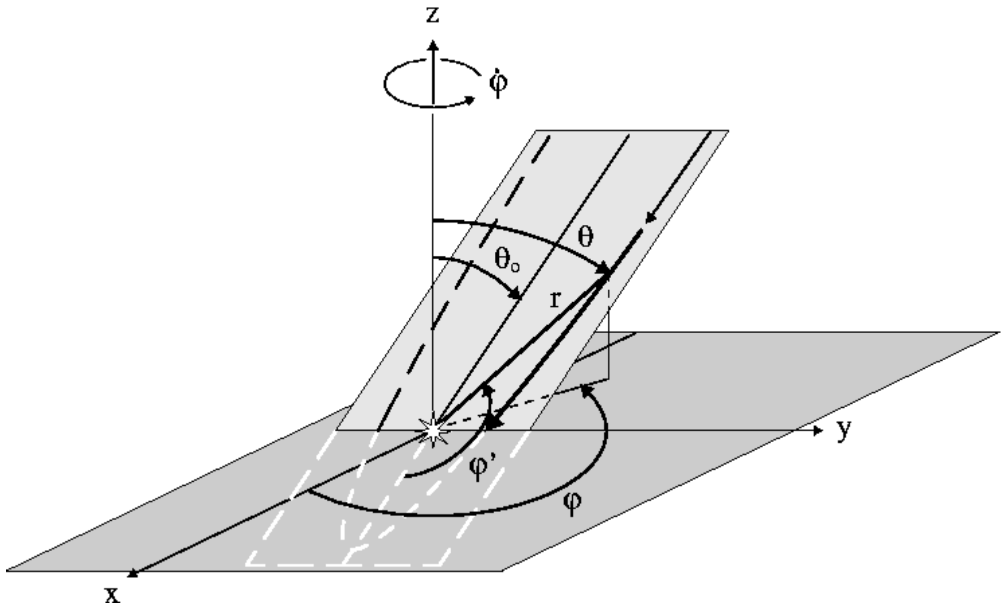


Figura I.1: Las partículas de fluido en la acreción, que lejos de la estrella giran como un cuerpo rígido con velocidad constante $\dot{\varphi}$, tienen una trayectoria parabólica cerca de la estrella. Únicamente son de interés las trayectorias aguas arriba del plano ecuatorial.

$$r = \frac{\sin^2\theta_0}{\left(1 - \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)}, \tag{2.10}$$

$$v_r = -\left(\frac{1}{r}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^{1/2}, \tag{2.11}$$

$$v_\theta = \left(\frac{1}{r}\right)^{1/2}\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin\theta}\left(1 + \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^{1/2}, \tag{2.12}$$

$$v_\varphi = \left(\frac{1}{r}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^{1/2}\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}, \tag{2.13}$$

$$\rho = r^{-3/2}\left(1 + \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^{-1/2}\left\{1 + 2r^{-1}P_2\left(\cos\theta_0\right)\right\}^{-1}. \tag{2.14}$$

De ahora en adelante, únicamente trabajaremos con las ecs.(2.10)-(2.14) para referirnos a la acreción. En otras palabras, solamente utilizaremos cantidades adimensionales a menos que se especifique lo contrario.

Una gráfica de las líneas de corriente (ec.(2.10)) proyectadas sobre cualquier plano ($\varphi = \text{const}$) se muestra en la fig.(I.2). El ángulo θ_0 que tiene una partícula de fluido al arrancar desde infinito se puede usar como una etiqueta para las líneas de corriente. Para cada θ_0 existe una sola línea de corriente (pues estas no deben intersectarse entre sí).

El hecho de que las líneas de corriente se acerquen paralelamente al eje de rotación de la nube a

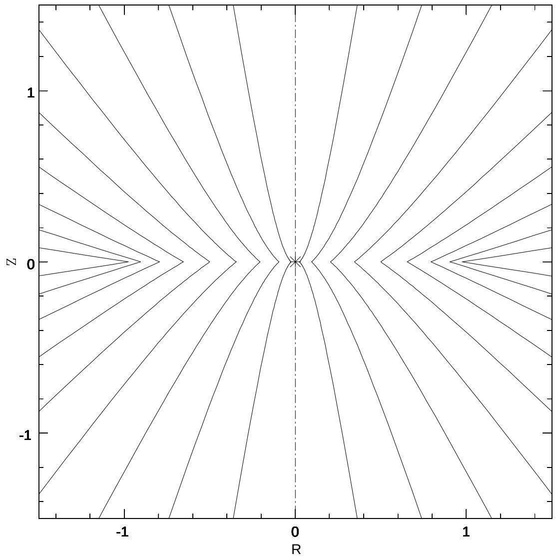


Figura I.2: Cada línea de corriente está etiquetada por el ángulo polar θ_0 inicial que tiene una partícula de fluido que gira alrededor de una nube de gas al iniciar su descenso hacia la estrella por fuerzas gravitacionales. R representa el radio cilíndrico y Z al eje polar. Las longitudes están medidas en unidades del radio del disco r_d. La línea punteada representa al eje de rotación de la nube de gas.

medida que $\theta_0 \to 0$ se ve claramente de las ecuaciones que representan el campo de velocidades, pues las componentes de la velocidad en θ y φ son cero justo en el eje de rotación. Esto es claro pues el material que inicialmente se encuentra cercano al eje de rotación posee poca velocidad azimutal.

Las ecuaciones que describen el campo de velocidades y la densidad son funciones que únicamente dependen de las posiciones y no del ángulo polar inicial θ_0. Para ver esto, basta con reescribir la ec.(2.10) como:

$$\cos^3\theta_0 + \cos\theta_0(r-1) - r\cos\theta = 0, \tag{2.15}$$

cuya solución de interés es *(Apéndice* §B*)*:

$$\cos\theta_0 = \begin{cases} (\cos\theta)^{1/3}, & r=1 \\ 2\left(\frac{r-1}{3}\right)^{1/2} \mathrm{sh}\left\{\frac{1}{3}\mathrm{ash}\left(\frac{r\cos\theta}{2\left(\frac{r-1}{3}\right)^{3/2}}\right)\right\}, & r>1 \\ 2\left(\frac{1-r}{3}\right)^{1/2} \mathrm{ch}\left\{\frac{1}{3}\mathrm{ach}\left(\frac{r\cos\theta}{2\left(\frac{1-r}{3}\right)^{3/2}}\right)\right\}, & r<1 \text{ y } \left(\frac{r\cos\theta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-r}{3}\right)^3 > 0 \\ 2\left(\frac{1-r}{3}\right)^{1/2} \cos\left\{\frac{1}{3}\mathrm{acos}\left(\frac{r\cos\theta}{2\left(\frac{1-r}{3}\right)^{3/2}}\right)\right\}, & r<1 \text{ y } \left(\frac{r\cos\theta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-r}{3}\right)^3 < 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Así, las ecs.(2.11)-(2.14) junto con la ec.(2.16) nos proporciona la velocidad y la densidad del flujo de acreción como funciones únicamente de las coordenadas r y θ.

§3. Isocontornos de densidad

A continuación daremos expresiones de la densidad para dos direcciones de interés. Una de ellas es a lo largo del eje de rotación y la otra en el plano ecuatorial. De la ec.(2.15) es fácil ver que:

$$\cos\theta_0\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \Theta(1-r)\sqrt{1-r}, \tag{3.1}$$

$$\cos\theta_0 \underset{\theta\to 0}{\widetilde{\ }} 1 - \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{r}{r+2}\right), \tag{3.2}$$

donde $\Theta(\tau)$ es la función escalón de Heaviside que vale 1 para $\tau > 0$ y 0 para $\tau < 0$.

Utilizando las ec.(3.1) y la ec.(3.2), junto con la ec.(2.14) se obtienen de inmediato los valores de la densidad para ciertos valores del ángulo polar:

$$\rho(\theta = \pi/2) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r}(1-r)}, & r < 1, \\ \frac{1}{(2r-1)^{1/2}(r-1))}, & r \geq 1, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\rho(\theta = 0) = \frac{1}{\sqrt{2r}\,(r+2)}. \tag{3.4}$$

A partir de la ec.(3.3) se deduce que la densidad tiene valor infinito en dos puntos. El hecho de que la densidad crezca infinitamente en $r = 0$ para cualquier θ se debe simplemente a acumulación de material de acreción en la estrella; sin embargo, en el borde del disco resulta que la densidad también tiene un valor ilimitado. Esto último se debe a que el disco se ha supuesto infinitamente delgado por lo que aparecen efectos de borde.

La fig.I.3 muestra la variación de la densidad como función de las posiciones para distintos ángulos polares. Esta gráfica, junto con la de isocontornos de densidad (fig.I.4) permite analizar la distribución de la densidad en el flujo de acreción.

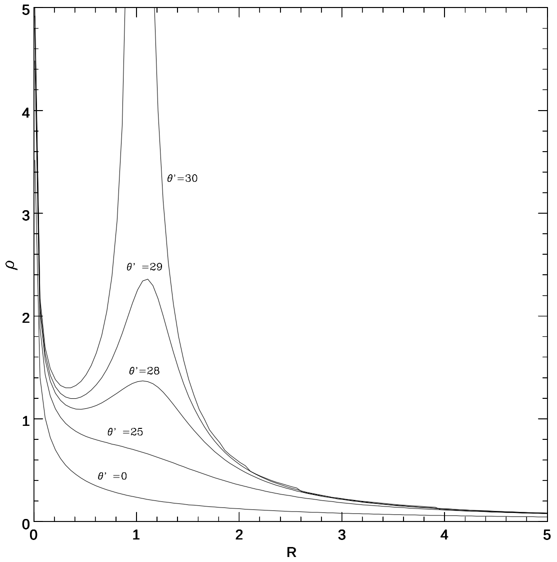


Figura I.3: La densidad ρ varía continuamente desde $\theta = 0$ hasta que en $\theta = \pi/2$ tiene un valor infinito en el borde del disco. R representa el radio cilíndrico. Las distancias están medidas en unidades del radio del disco y la densidad en unidades de ρ_0. La relación entre el ángulo polar primado y el no primado es: $\theta = (\pi/60)\theta'$.

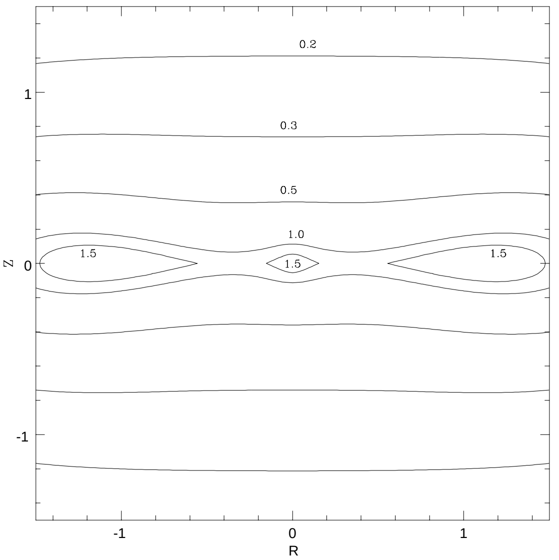


Figura I.4: Las líneas continuas muestran los puntos en donde la densidad toma un mismo valor para el flujo de acreción. La densidad está medida en unidades de la densidad ρ_0. Las distancias están medidas en unidades del radio del disco r_d.

Capítulo II

Interacción estacionaria

En este capítulo analizaremos la interacción del gas que arroja la estrella con el flujo de acreción descrito en el capítulo I. Supondremos que los choques hidrodinámicos formados por cada flujo ocupan la misma posición en el espacio, son fuertes y han alcanzado su estado estacionario. Como veremos en el capítulo III, cuando la estrella comienza a arrojar gas la posición de ambos choques es justo la superficie de la estrella; sin embargo estos choques evolucionan en el tiempo y alcanzan el estado estacionario bajo ciertas condiciones. De esta manera, analizaremos la forma geométrica de los choques detalladamente. Por último, describiremos en detalle la dirección del flujo post-choque tanto de acreción como del viento estelar.

§4. Formulación del problema

Hasta ahora hemos considerado un solo flujo, el de acreción. Sin embargo, las observaciones muestran que las estrellas de formación reciente arrojan material con velocidades supersónicas. Este flujo se denomina viento estelar. Por simplicidad, en lo sucesivo, consideraremos que el viento es isotrópico y de velocidad constante. De ahora en adelante analizaremos la interacción entre el flujo de acreción (descrito en el capítulo I) con el viento estelar.

Debido a que el flujo de acreción y el viento estelar son supersónicos y ambos forman un obstáculo uno con respecto al otro, se forman dos choques hidrodinámicos (un choque para cada flujo). Bajo la suposición de un choque infinitamente delgado (en otras palabras supondremos que ambos choques ocupan la misma posición en el espacio, que por simplicidad llamaremos choque a menos que se especifique lo contrario), analizaremos la forma geométrica que debe tener el choque considerando que las únicas fuerzas que mantienen estable a este mismo son de presión. Además de las fuerzas de presión, existen fuerzas centrífugas producidas por el material post-choque. Estas fuerzas surgen gracias a que en general el choque es oblicuo y curvo. En el capítulo IV analizaremos con detalle las condiciones bajo las cuales la aproximación de capa delgada (es decir, que los choques ocupan la misma posición espacial) es válida estudiando las longitudes de enfriamiento de los choques y veremos que para el caso estacionario esta aproximación es válida.

Por el momento analicemos únicamente el caso en el que el choque ha evolucionado en el tiempo de tal forma que ha llegado a la fase estacionaria. Considerando que el término inercial en la ecuación de balance de presiones es despreciable, la condición de balance de presiones hidrodinámicas puede expresarse de manera sencilla suponiendo que las cantidades pre-choque para ambos flujos cumplen con la relación: $\rho v_n^2 \gg p$ (donde v_n es la velocidad normal a la superficie de discontinuidad). En otras palabras, consideraremos que tanto el choque producido por el viento estelar, así como el producido por el flujo de acreción son fuertes. Como en este caso la presión post-choque para ambos flujos es, salvo una función que depende de κ que resulta ser del orden unidad (Landau & Lifshitz, 1995), ρv_n^2 pre-choque, la ecuación de balance de presiones post-choque que mantiene al choque estable es:

$$\rho_w v_{wn}^2 = \rho v_n^2, \tag{4.1}$$

donde el subíndice w se refiere a las cantidades hidrodinámicas correspondientes al viento estelar. La densidad del viento está determinada por la tasa de pérdida de masa de la estrella $\dot{M}_w$:

$$\dot{M}_w = 4\pi r^2 v_w \rho. \tag{4.2}$$

Para adimensionalizar la ec.(4.1), la cual etiqueta al lugar geométrico del choque, hagamos los cambios:

$$\frac{v_{wn}}{v_w} \longrightarrow v_{wn}, \qquad \frac{\rho_w}{\rho_{w0}} \longrightarrow \rho_w \tag{4.3}$$

donde $\rho_{w0} = \dot{M}_w / 4\pi r_d^2 v_w$, junto con los cambios como en la ec.(2.8). De esta forma se obtiene la ecuación adimensionalizada del lugar geométrico de los puntos del choque:

$$\rho_w v_{wn}^2 \lambda = \rho v_n^2 \tag{4.4}$$

con λ un parámetro adimensional dado por:

$$\lambda \equiv \frac{\dot{M}_w v_w}{\dot{M} v_k}. \tag{4.5}$$

§5. Condiciones a la frontera del choque estacionario

El balance de presiones que se muestra en la ec.(4.4) determina el lugar geométrico de la posición del choque r como función de los ángulos polar y azimutal. En otras palabras, la superficie de la onda de choque r está parametrizada por las cantidades θ y φ. Un vector normal a esta superficie es:

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}, \tag{5.1}$$

pues $\partial\vec{r}/\partial\theta$ y $\partial\vec{r}/\partial\varphi$ son vectores tangentes a cualquier superficie parametrizada por los ángulos polar y azimutal. Gracias a que el flujo de acreción, así como el del viento estelar poseen simetría azimutal, la posición de la onda de choque no debe depender explícitamente del ángulo φ. Utilizando la ec.(A.1) del apéndice §A y dividiendo entre las diferenciales correspondientes, la ec.(5.1) es claramente:

$$\widehat{n} = \frac{r\widehat{e}_r - (\partial r/\partial\theta)\,\widehat{e}_\theta}{\left\{ r^2 + (\partial r/\partial\theta)^2 \right\}^{1/2}}. \tag{5.2}$$

Como las velocidades del flujo de acreción y del viento estelar son radiales sobre el eje de rotación de la nube, los puntos del choque cumplen con la condición:

$$\left.\frac{\partial r}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = 0, \tag{5.3}$$

que es la condición de frontera a imponer sobre la onda de choque estacionaria. Utilizando la ec.(5.2) y la ec.(5.3) en la ec.(4.4) para las aproximaciones correspondientes sobre el eje de rotación de la nube, se obtiene el valor de r en la frontera:

$$\left. r \right|_{\theta=0} = -2 + \frac{1 - 2\sqrt{1 - 4\lambda^2}}{2\lambda^2}. \tag{5.4}$$

De la ec.(5.4) se deduce que para $\lambda > 1/2$ no existe un valor para la condición inicial de la posición del choque. Esto indica que no existe solución estacionaria para estos valores del parámetro λ.

§6. Forma geométrica del choque estacionario

Con ayuda de la ec.(5.2), la ec.(4.4) toma una forma sencilla:

$$\frac{\partial r}{\partial\theta} = \frac{\lambda^{1/2} + \rho^{1/2} r v_r}{\rho^{1/2} v_\theta}, \tag{6.1}$$

que es la ecuación que deben cumplir los puntos geométricos del choque adjunta con la condición a la frontera dada por la ec.(5.4). La ec.(6.1) muestra que la forma geométrica del choque depende del parámetro libre λ. La fig.(II.1) muestra algunas integrales de los puntos geométricos del choque para ciertos valores de λ, obtenidas utilizando un método de Runge–Kutta de cuarto orden.

La fig.(II.1) muestra que cuando el parámetro $\lambda \leq 1/2$ los choques están divididos en dos casos, aquellos cuya derivada del lugar geométrico del choque respecto al ángulo polar es mayor a cero ($\lambda = 0.2$, por ejemplo) y los que tienen esta misma derivada menor a cero ($\lambda = 0.48$, por ejemplo). Es fácil mostrar que no existe una configuración en la cual esta derivada sea cero para cualquier ángulo polar[†]. Cuando $\lambda > 1/2$ no existe configuración estacionaria como lo muestra la ec.(5.4).

[†] Basta suponer que la configuración es una circunferencia. Necesariamente se tiene entonces que $r(\theta = \pi/2) = r(\theta = 0)$. De esta forma se obtiene un valor de λ que no corresponde a una circunferencia.

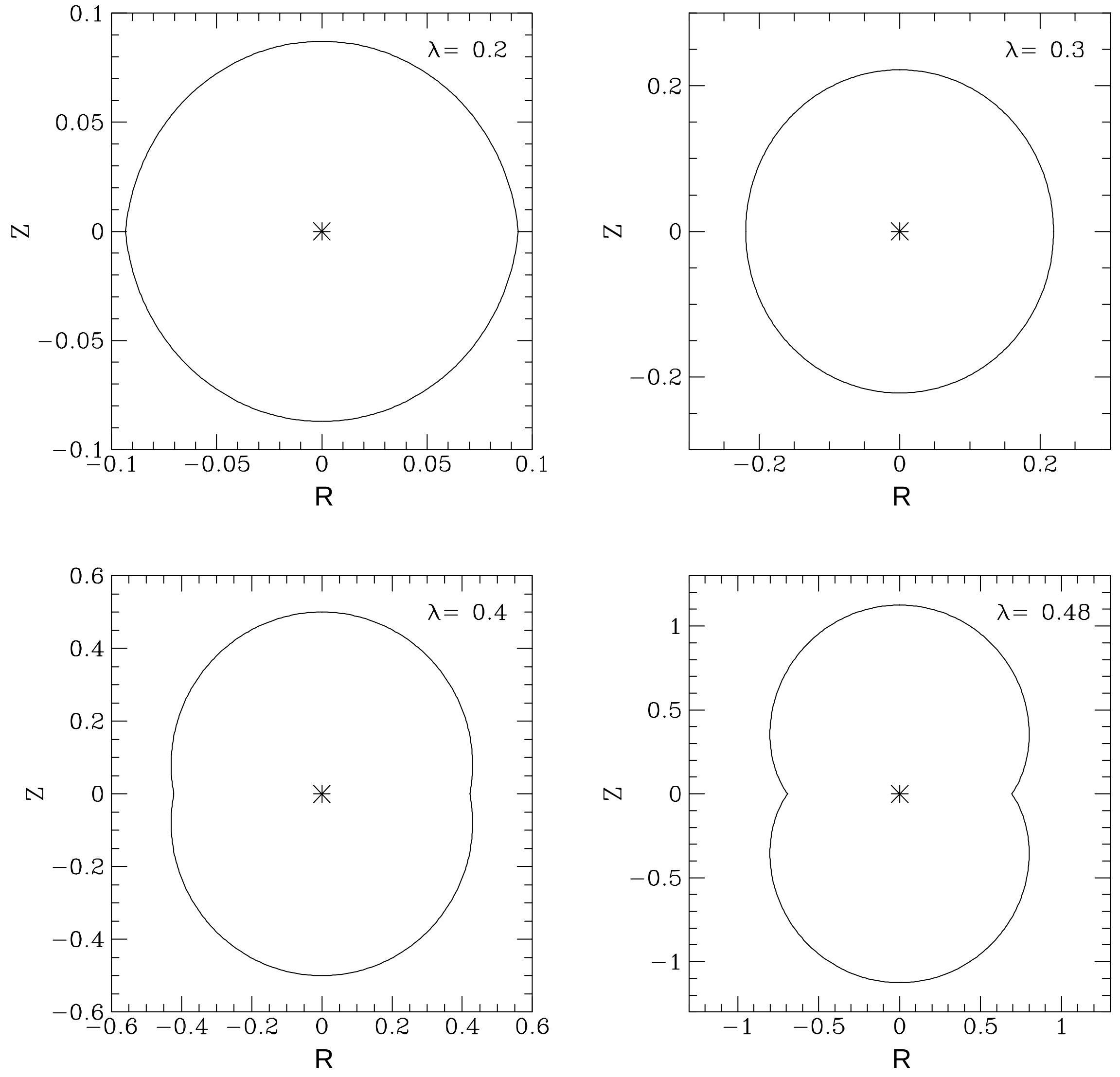


Figura II.1: En la interacción del viento estelar con el flujo de acreción se forman dos choques hidrodinámicos fuertes, los cuales, bajo la suposición de capa delgada ocupan la misma posición espacial. R representa el radio cilíndrico, Z el eje polar. Las distancias están medidas en unidades del radio del disco r_d.

Hasta ahora hemos considerado que los puntos geométricos que describen el choque de acreción, así como los del viento estelar coinciden. Sin embargo existe una capa intermedia entre ambos (fig.(II.2)). Calculemos ahora cuál es la dirección que deben tener ambos flujos inmediatamente después de atravesar los choques hidrodinámicos correspondientes. Esto es importante para cualquier trabajo posterior en el cual se considere la presión producida por fuerzas centrífugas. Bajo la suposición de que ambos choques son altamente radiativos las componentes de velocidad normal post-choque son despreciables.

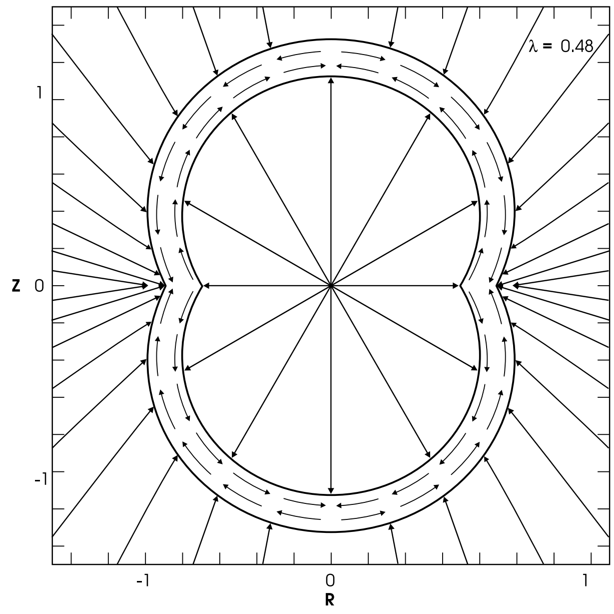
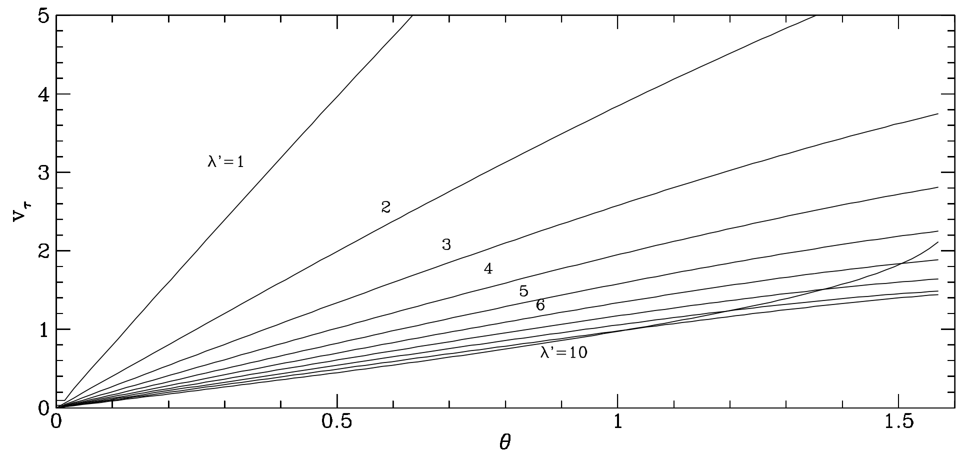


Figura II.2: En la interacción del viento estelar con el flujo de acreción, dado que un flujo constituye un obstáculo para el otro y ambos flujos son supersónicos, se forman dos choques. En la figura se muestran estos dos choques y la dirección del flujo antes y después de atravesar el frente de choque correspondiente. El radio cilíndrico R y las distancias medidas sobre el eje polar Z están medidas en unidades del radio del disco r_d.

Sin embargo, dado que las componentes tangenciales de la velocidad son continuas a través de los choques correspondientes, la dirección post-choque del flujo está determinada por las componentes tangenciales de la velocidad pre-choque. Como el choque no depende explícitamente del ángulo azimutal, un vector tangente a la misma es (ec.(A.1)):

$$\widehat{\tau} = \frac{(\partial r/\partial\theta)\,\widehat{e}_r + r\widehat{e}_\theta}{\left\{r^2 + (\partial r/\partial\theta)^2\right\}^{1/2}}. \tag{6.2}$$

Dada la simetría del problema, analicemos únicamente la región $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Utilizando el vector tangente de la ec.(6.2) y recordando que la componente de velocidad en el ángulo polar es positiva para el flujo de acreción, diremos que el flujo post-choque (de acreción o del viento estelar) sube si $\vec{v}\cdot\widehat{\tau} < 0$ (el flujo se aleja del plano ecuatorial) y baja si $\vec{v}\cdot\widehat{\tau} > 0$ (el flujo se acerca al plano ecuatorial). Si la igualdad se cumple diremos simplemente que el flujo post-choque es estático. La fig.(II.3) muestra los valores de la velocidad tangencial pre-choque de ambos flujos como función del ángulo polar para distintos valores de λ. De esta figura se deduce que, en el caso del viento para $\lambda \lesssim 0.3$ el flujo post-choque baja y para $\lambda \gtrsim 0.3$ sube. Cuando $\lambda \approx 0.3$ se tiene una combinación de ambos, es decir, sube en ciertas regiones y baja en otras. Para el caso del flujo de acreción post-choque, es claro que éste siempre baja, independientemente de la configuración. Cabe hacer notar que existe un punto de acumulación de material $(\theta = 0)$ en el cual ocurre que el gas es estático tanto para el flujo de acreción como para el



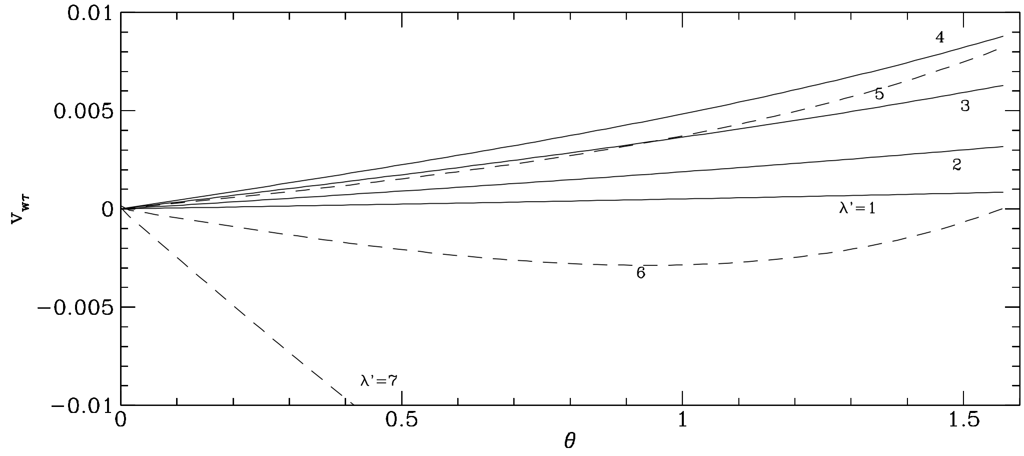


Figura II.3: La dirección del flujo post-choque queda determinada por los valores de la velocidad tangencial pre-choque para cada flujo. La velocidad tangencial del viento estelar $v_{w\tau}$ está medida en unidades de la velocidad del viento v_w y la velocidad del flujo de acreción ν_τ está medida en unidades de la velocidad ν_k. Los números que aparecen en la gráfica se refieren a la cantidad λ', definida como $\lambda = 0.05\lambda'$.

flujo del viento estelar†.

†En este punto de acumulación se espera que el material se colime hacia regiones que se alejan de la estrella cuando se considere en la ec.(4.1) la presión producida por fuerzas centrífugas.

Capítulo III

Evolución temporal

En este capítulo analizaremos la evolución en el tiempo de la interacción del gas que arroja la estrella con el flujo de acreción descrito en el capítulo 1. Supondremos que los choques hidrodinámicos formados por cada flujo ocupan la misma posición en el espacio y que son fuertes. Con detalle describiremos la forma geométrica de estos choques y por último analizaremos la dirección del flujo post-choque tanto del flujo de acreción como del viento estelar desde el marco de referencia de la onda de choque.

§7. Formulación del problema

Analizemos ahora la evolución en el tiempo de la interacción del viento estelar con el flujo de acreción. De la misma forma que en el capítulo II, debido a que el flujo de acreción y el flujo del viento estelar son supersónicos y ambos forman un obstáculo uno con respecto al otro, dos choques hidrodinámicos se forman. Suponiendo que ambos choques ocupan la misma posición en el espacio, que por simplicidad llamaremos choque a menos que se especifique lo contrario, analizaremos la forma geométrica que debe tener el choque considerando que las únicas fuerzas que mantienen estable al mismo son de presión. Si consideramos además que el choque es fuerte, desde el marco de referencia del choque la ec.(4.1) sigue siendo válida. Para transformarla al marco de referencia de la estrella basta con hacer los cambios:

$$v_{\mathrm{wn}} \longrightarrow \left(v_{\mathrm{wn}} - v_{\mathrm{sn}}\right), \qquad v_{\mathrm{n}} \longrightarrow \left(v_{\mathrm{sn}} - v_{\mathrm{n}}\right), \tag{7.1}$$

donde v_{wn}, v_{sn}, v_{n} son respectivamente la velocidad del viento, de la onda de choque y del flujo de acreción, todas normales a la onda de choque. Así pues, haciendo los cambios de la ec.(7.1) en la ec.(4.1) obtenemos que la condición de balance de presiones es:

$$\rho_{\mathrm{w}} \left(v_{\mathrm{wn}} - v_{\mathrm{sn}}\right)^2 = \rho \left(v_{\mathrm{sn}} - v_{\mathrm{n}}\right)^2 \tag{7.2}$$

donde la componente normal de las velocidades está en la dirección del vector de la ec.(5.2). De la misma forma que en la sección §4, la ec.(7.2) se puede adimensionalizar. Basta con hacer los cambios de la ec.(2.8) y la ec.(4.3), adicionados con:

$$\frac{v_{sn}}{v_k} \longrightarrow v_{sn}. \tag{7.3}$$

De esta manera la ec.(7.2) adimensionalizada es:

$$v_{sn} = \frac{(\lambda\rho_w)^{1/2} v_{wn} + v_n \rho^{1/2}}{(\eta\rho_w)^{1/2} + \rho^{1/2}}, \tag{7.4}$$

donde λ está definido por la ec.(4.5) y η es otro parámetro adimensional que aparece cuando el choque evoluciona en el tiempo:

$$\eta \equiv \lambda \left(\frac{v_k}{v_w} \right)^2. \tag{7.5}$$

La ec.(7.4) que representa el balance de presiones post-choque entre el flujo de acreción y el flujo del viento estelar, en el caso en el que el choque evoluciona en el tiempo, claramente converge a la ec.(4.4) en el caso estacionario, es decir, cuando $v_{sn} = 0$.

Debido a que solamente es de interés la forma geométrica del choque y no la trayectoria individual de un pequeño segmento de la onda de choque, únicamente analizaremos cómo varía el choque como función del tiempo para un ángulo polar fijo. De esta manera, la relación entre la velocidad radial con la que se mueve el choque v_s y la velocidad normal al mismo se obtiene con ayuda de la ec.(5.2):

$$v_{sn} = \frac{r v_s}{\left\{ r^2 + (\partial r/\partial\theta)^2 \right\}^{1/2}}. \tag{7.6}$$

La forma geométrica del choque que está caracterizada por la ec.(7.4) toma un aspecto sencillo con ayuda de la ec.(7.6):

$$v_s = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{(\lambda\rho_w)^{1/2} r + \rho^{1/2}\{r v_r - v_\theta \partial r/\partial\theta\}}{r\left\{ (\eta\rho_w)^{1/2} + \rho^{1/2} \right\}}, \tag{7.7}$$

en donde hemos utilizado las expresiones normales de la velocidad tanto para el viento estelar como para el flujo de acreción que están determinadas por la ec.(5.2).

§8. Evolución temporal del choque

Las formas de los campos de velocidad y densidad para el flujo de acreción tienen simetría esférica para $r \ll 1$, que coincide con la simetría esférica que posee el campo de velocidades y la densidad del viento. En otras palabras, al tiempo inicial $t = 0$ ocurre que el choque es una superficie esférica, cuyo radio coincide con el radio de la estrella:

$$r\,(\theta, t = 0) = \frac{r_0}{r_d} \ll 1. \tag{8.1}$$

La ec.(7.4) contiene dos parámetros adimensionales. Por simplicidad, de aquí en adelante supondremos que la estrella en cuestión es de formación reciente y de baja masa. Las observaciones muestran (Black et al. 1991) que para estas estrellas $v_w \sim 300\,\mathrm{km}$, $M \sim 1M_\odot$ y $r_d \sim 100\,\mathrm{au}$, dando lugar a que el parámetro η únicamente esté determinado por el valor de λ:

$$\eta = 10^{-4}\lambda. \tag{8.2}$$

La solución de la ec.(7.7) adjunta con la condición inicial de la ec.(8.1) se obtuvo utilizando el método de MaCormack & Paullay (1972, Apéndice §C). Las integrales de esta ecuación muestran (fig.(III.1)) que la situación estacionaria únicamente se alcanza para $\lambda \leq 1/2$ convergiendo a las soluciones encontradas en el capítulo 2. Cuando ocurre la desigualdad opuesta, las configuraciones crecen de manera ilimitada excepto para el plano ecuatorial en donde el choque alcanza el borde del disco y se mantiene fijo a este para tiempos suficientemente grandes ($\lambda = 0.7$ en la fig.(III.1), por ejemplo). Esto último es de esperarse debido a que la densidad del flujo de acreción crece de manera ilimitada en el borde del disco, por lo que el balance de presiones en la ec.(7.2) sobre el plano ecuatorial solamente puede realizarse para $r \leq 1$. Utilizando las ecs.(2.10)-(2.14), para valores de $r \gg 1$ y la ec.(7.7), se obtiene la relación que debe cumplir la superficie del choque para tiempos suficientemente grandes:

$$\frac{\partial r}{\partial t}{}_{\widetilde{r \rightarrow \infty}} \frac{2^{1/4}\lambda^{1/2}}{r^{1/4}}, \tag{8.3}$$

de donde se obtiene de inmediato la integral:

$$r_{\widetilde{t \rightarrow \infty}} \left(\frac{5\lambda^{1/2}}{2^{7/4}} \right)^{4/5} t^{4/5}. \tag{8.4}$$

La fig.(III.2) muestra a qué tiempos la aproximación hecha con la ec.(8.4) comienza a ser válida en el eje polar del choque.

§9. Evolución temporal del flujo post-choque

En el análisis previo de la evolución en el tiempo del choque, hemos considerado que la posición del choque producido por el flujo del viento estelar, así como el choque del flujo de acreción coinciden espacialmente. No obstante, existe una región intermedia entre ambas superficies de discontinuidad como lo muestra la fig.(II.2). A continuación analizaremos la dirección que deben tener ambos flujos después de atravesar la discontinuidad hidrodinámica correspondiente desde el marco de referencia del choque.

El razonamiento hecho en la sección §2.3 para calcular la dirección del flujo post-choque, tanto de

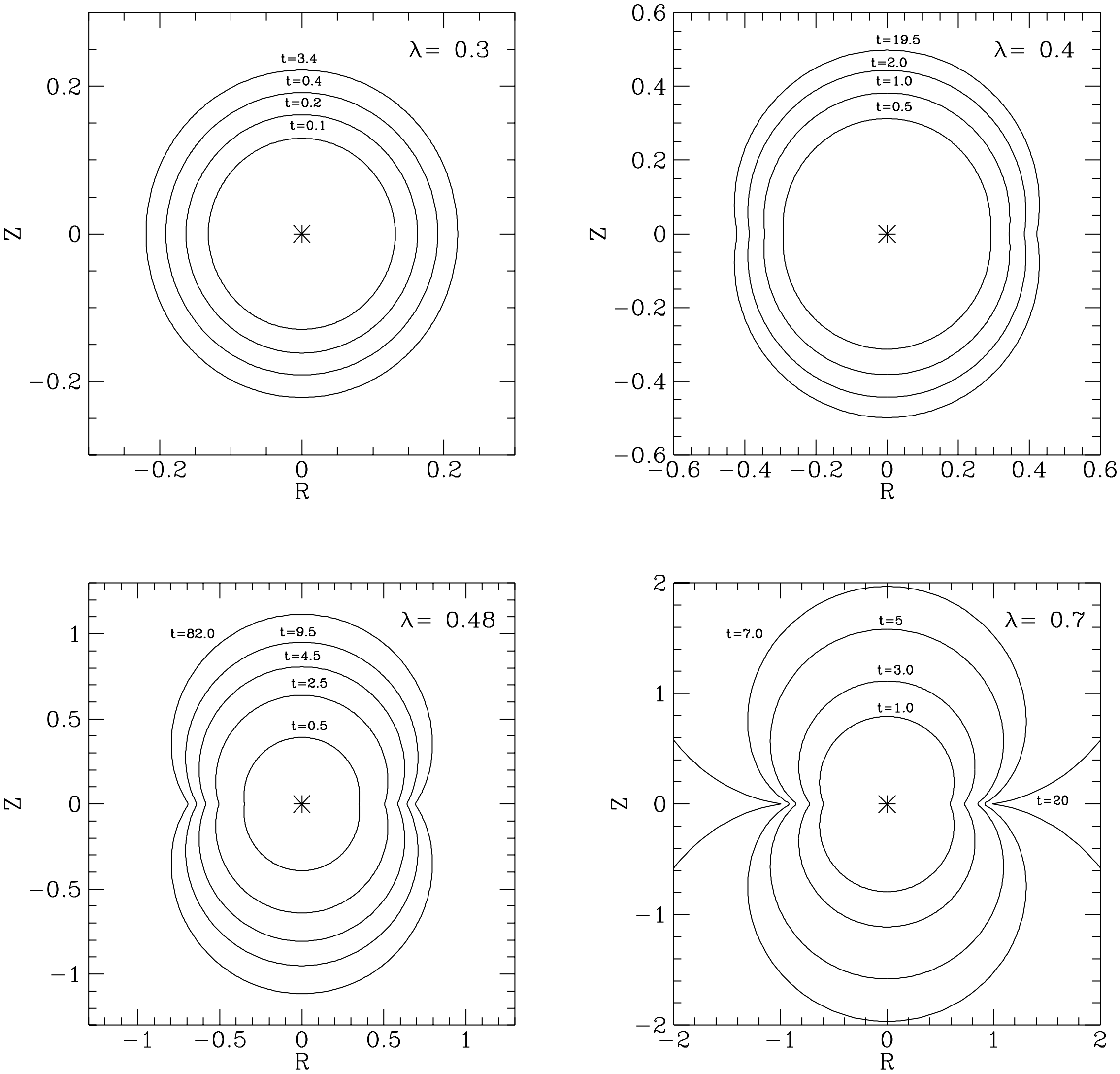


Figura III.1: Las configuraciones del choque para distintos intervalos de tiempo t, en unidades de r_d/v_k, y distintos valores de λ convergen al caso estacionario de la fig.(II.1) cuando $\lambda \leq 1/2$ a tiempos suficientemente grandes. Cuando $\lambda > 1/2$ no se obtiene una situación estacionaria y las configuraciones crecen ilimitadamente. El radio cilíndrico R y la coordenada Z están medidos en unidades del radio del disco r_d.

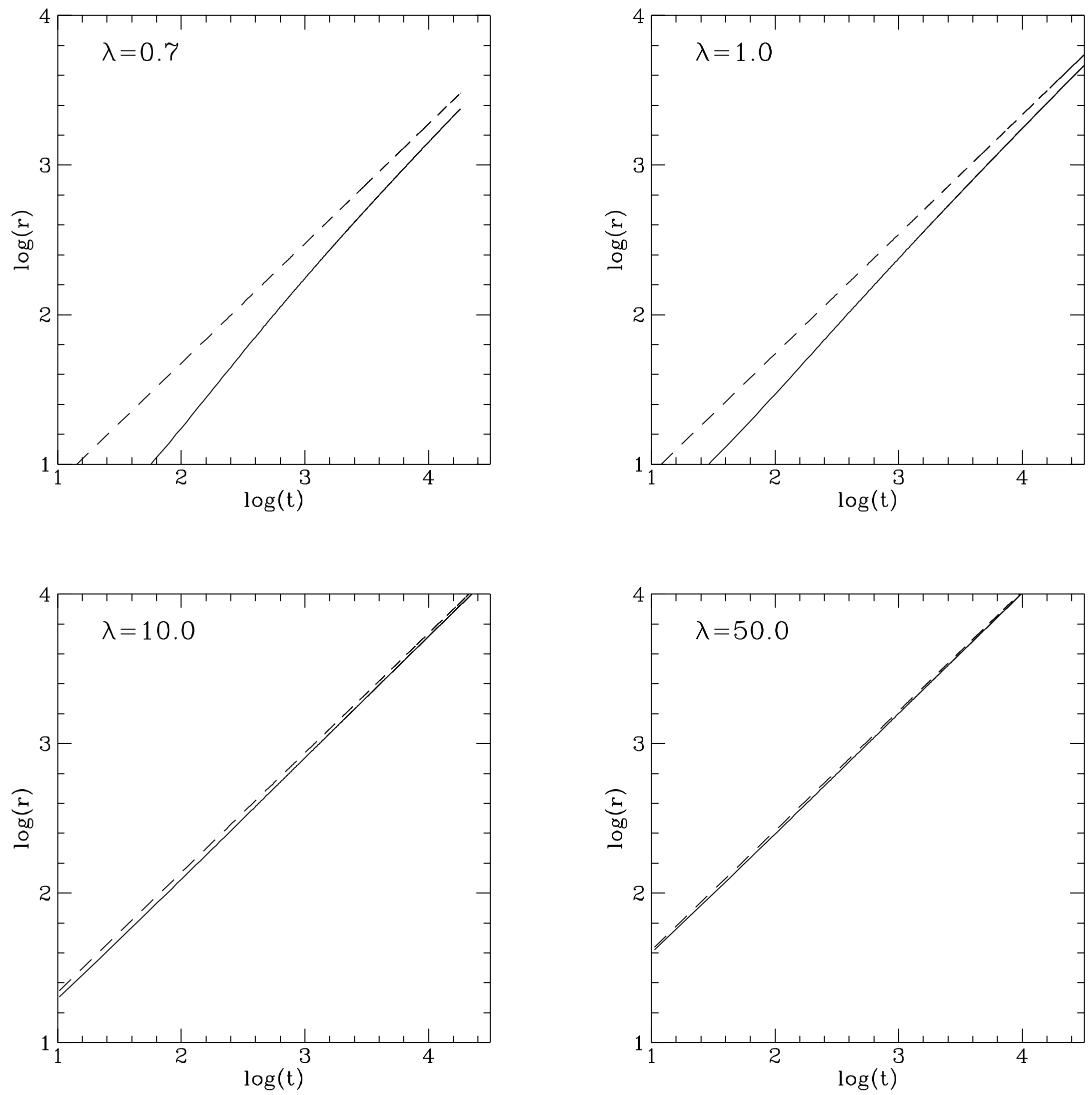


Figura III.2: Cuando el parámetro $\lambda > 1/2$, la forma geométrica del choque es esférica para tiempos suficientemente grandes y la posición del mismo crece como una potencia del tiempo (ec.(8.4)). Las líneas continuas muestran el cálculo numérico y las punteadas el cálculo analítico (ec.(8.4) de la posición del choque r en unidades del radio del disco r_d en el eje polar. El tiempo t está medido en unidades de r_d/v_k.

acreción como del viento estelar, funciona para el caso evolutivo en el tiempo en un marco de referencia que se encuentra fijo en el choque. Sobre este mismo sistema de referencia, únicamente analizaremos la región $0 \leq \theta \leq \pi/2$, dada la simetría del problema. Análogamente a la sección §2.3 diremos que el flujo tanto de acreción como el del viento estelar, sube si se aleja del plano ecuatorial y baja si se acerca al mismo plano. Cuando no ocurra lo anterior diremos simplemente que el flujo es estático.

Desde el sistema de referencia del choque, la zona post-choque del flujo de acreción baja para cualquier valor del parámetro λ. En este mismo sistema de referencia para el flujo post-choque del viento estelar, para $\lambda \lesssim 0.3$ el flujo sube y para $0.3 \lesssim \lambda \leq 1/2$ el flujo baja a cualquier tiempo. Cuando $\lambda \sim 0.3$ el flujo sube en algunas regiones y baja en otras. Para valores de $\lambda > 1/2$ la dirección del flujo post-choque del viento estelar baja. Como es de esperarse, para valores $\lambda \leq 1/2$ donde se alcanza la situación estacionaria a tiempos suficientemente grandes, la dirección post-choque de ambos flujos converge a los resultados contenidos en la fig.(II.3). Cabe hacer notar que cuando $\lambda > 1/2$ y el tiempo es suficientemente grande, la forma del choque es una esfera y el flujo de acreción, así como el flujo del viento estelar tienen simétria esférica; por lo tanto, desde el marco de referencia del choque, el flujo post-choque de ambos gases es estático.

Capítulo IV

Longitudes de enfriamiento

En este capítulo analizaremos bajo qué circunstancias la suposición de capa delgada hecha en los capítulos I y II es válida. Por último analizaremos la emisión y el flujo de emisión producida por el viento estelar al atravesar el frente de choque correspondiente.

§10. Región de validez de la aproximación de la capa delgada

Hasta ahora hemos supuesto que tanto el choque producido por el viento estelar como el producido por el flujo de acreción, ocupan la misma posición en el espacio. A continuación analizaremos bajo qué circunstancias esta aproximación es correcta. En lo sucesivo utilizaremos el concepto de longitud de enfriamiento (l_c), que es la distancia recorrida por una partícula de fluido desde que atraviesa el frente de choque hasta alcanzar una temperatura de $10^4\,\mathrm{K}^{\dagger}$.

Hartigan et al. (1987) estimaron longitudes de enfriamiento para distintas velocidades de choque (v_{sn}), en el intervalo $20\,\mathrm{km\,s^{-1}} \lesssim v_{sn} \lesssim 400\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, y número de partículas por unidad de volumen n, en el intervalo $100\,\mathrm{cm^{-3}} \lesssim n \lesssim 1000\,\mathrm{cm^{-3}}$. De sus resultados se infiere que (Canto et al., 1988):

$$\left(\frac{l_c}{\mathrm{AU}}\right) = A\left(\frac{v_{sn}}{100\,\mathrm{km\,s^{-1}}}\right)^{\beta}\left(\frac{n}{\mathrm{cm^{-3}}}\right)^{-1}, \tag{10.1}$$

†Cuando la partícula de fluido atraviesa el frente de choque su temperatura aumenta. Inmediatamente después, esta temperatura disminuye rápidamente hasta alcanzar un valor alrededor de $10^4\,\mathrm{K}$ (Hartigan et al., 1987). Más allá de esta distancia, la partícula continúa alejándose del frente de choque, sin embargo su temperatura disminuye muy lentamente.

donde:

$$A = \begin{cases} 6.6 & v_{sn} \lesssim 70\,\mathrm{kms^{-1}}, \\ 43.33 & v_{sn} \gtrsim 70\,\mathrm{kms^{-1}}. \end{cases} \tag{10.2}$$

$$\beta = \begin{cases} -5.5 & v_{sn} \lesssim 70\,\mathrm{kms^{-1}}, \\ 5.7 & v_{sn} \gtrsim 70\,\mathrm{kms^{-1}} \end{cases} \tag{10.3}$$

En lo sucesivo supondremos que la ec.(10.1) es válida para cualquier intervalo de densidades, así como de velocidades.

Las ecs.(2.2)-(2.6), la ec.(4.3) y la ec.(7.3), que describen el flujo de acreción, el flujo del viento estelar, la velocidad del choque y el tiempo, pueden ponerse en forma dimensional:

$$r = r_d\widetilde{r}, \quad \rho = \rho_0\widetilde{\rho}, \quad v_i = v_k\widetilde{v}_i \quad (i = r, \theta, \varphi),$$
$$v_s = v_k\widetilde{v}_s, \quad v_w = v_w\widetilde{v}_w, \quad \rho_w = \rho_{w0}\widetilde{\rho}_w, \quad t = (r_d/v_k)\,\widetilde{t}, \tag{10.4}$$

donde las cantidades con "tilde" se refieren a las cantidades adimensionales que hemos considerado anteriormente.

A continuación damos valores de las cantidades hidrodinámicas tanto del flujo de acreción, como del viento estelar para valores típicos de estrellas de baja masa y formación reciente:

$$\left(\frac{v_k}{\mathrm{kms^{-1}}}\right) = 3\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{r_d}{100\,\mathrm{AU}}\right)^{-1/2}, \tag{10.5}$$

$$\left(\frac{n_0}{\mathrm{cm^{-3}}}\right) = 3.6\times10^6\left(\frac{\dot{M}}{10^{-6}\,M_\odot\text{año}^{-1}}\right)\left(\frac{r_d}{100\,\mathrm{AU}}\right)^{-3/2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1}, \tag{10.6}$$

$$\left(\frac{n_{w0}}{\mathrm{cm^{-3}}}\right) = 3\times10^4\left(\frac{\dot{M}_w}{10^{-7}\,M_\odot\text{año}^{-1}}\right)\left(\frac{r_d}{100\,\mathrm{AU}}\right)^{-2}\left(\frac{v_w}{300\,\mathrm{kms^{-1}}}\right)^{-1}, \tag{10.7}$$

donde n_0 y n_{w0} se refieren al número de partículas por unidad de volumen del flujo de acreción y del viento solar respectivamente, considerando que la masa promedio por partícula es $\bar{m} \sim 1.3m_H$. Como lo muestra la ec.(10.5), los valores típicos de la velocidad v_k son lo suficientemente pequeños como para calcular las longitudes de enfriamiento del flujo de acreción utilizando la ec.(10.1); por lo tanto, de ahora en adelante únicamente analizaremos las longitudes de enfriamiento para el viento estelar.

El cálculo de las longitudes de enfriamiento para el caso del viento estelar lo haremos dejando fijas las cantidades M, $\dot{M}$, r_d, v_w, con valores típicos como los de las ecs.(10.5)-(10.7) y únicamente variaremos la cantidad $\dot{M}_w$. La tabla 4.1 muestra cómo varía el cociente máximo de longitudes de enfriamiento entre distancia al choque para distintos ángulos polares en el caso estacionario. Los resultados contenidos

λ	$(l_c/r)_{max} \times 10^3$
0.04	0.54
0.08	1.08
0.12	1.65
0.16	2.25
0.20	2.88
0.24	3.56
0.28	4.27
0.32	5.20
0.36	6.38
0.40	7.96
0.44	10.35
0.48	15.21

Tabla IV.1: Valores de la longitud de enfriamiento en el caso estacionario para el choque producido por el viento estelar para distintos parámetros λ. El cociente $(l_c/r)_{max}$ representa el valor máximo del cociente de longitudes de enfriamiento (l_c) y la distancia al choque (r), para distintos ángulos polares.

en la Tabla 4.1 muestran que para el caso estacionario, la suposición de capa delgada post-choque es correcta para el viento estelar.

Analicemos a continuación las longitudes de enfriamiento del viento estelar para el caso en que el choque evoluciona con el tiempo. Sobre el marco de referencia de la onda de choque, las fórmulas empleadas en la situación estacionaria siguen siendo válidas. Desde el sistema de referencia de la estrella, con ayuda de la ec.(7.1), la ec.(10.1) toma la forma:

$$\left(\frac{l_c}{\mathrm{AU}}\right) = A \left(\frac{\widetilde{v}_{wn} v_w - \widetilde{v}_{sn} v_k}{100\,\mathrm{kms}^{-1}}\right)^{\beta} \left(\frac{\widetilde{\rho}_w n_{w0}}{\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{-1}. \tag{10.8}$$

En este caso sucede que el cociente entre la longitud de enfriamiento y la distancia de la estrella al choque, para $\lambda > 1/2$, es grande. Para ver esto, basta con hacer la aproximación asintótica de la ec.(10.8) para $r \gg 1$. De esta forma y utilizando la ec.(8.4) se obtiene:

$$\left(\frac{l_c}{\mathrm{AU}}\right) \left(\frac{\widetilde{r} r_d}{\mathrm{AU}}\right)^{-1}_{\widetilde{t \to \infty}} A \left(\frac{5\lambda^{1/2}}{2^{7/4}}\right)^{4/5} \left(\frac{v_w}{100\,\mathrm{kms}^{-1}}\right)^{\beta} \left(\frac{n_{w0}}{\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{-1} \left(\frac{r_d}{\mathrm{AU}}\right)^{-1} \widetilde{t}^{4/5}. \tag{10.9}$$

La fig.(IV.1) muestra a qué tiempos la suposición de capa delgada deja de ser válida para algunos valores del parámetro $\lambda > 1/2$. En el caso en que el choque evoluciona en el tiempo, para $\lambda \leq 1/2$, sucede que el cociente entre las longitudes de enfriamiento y la distancia del choque es siempre pequeña, hasta que se alcanza la configuración estacionaria, dando lugar a los valores de la Tabla IV.1.

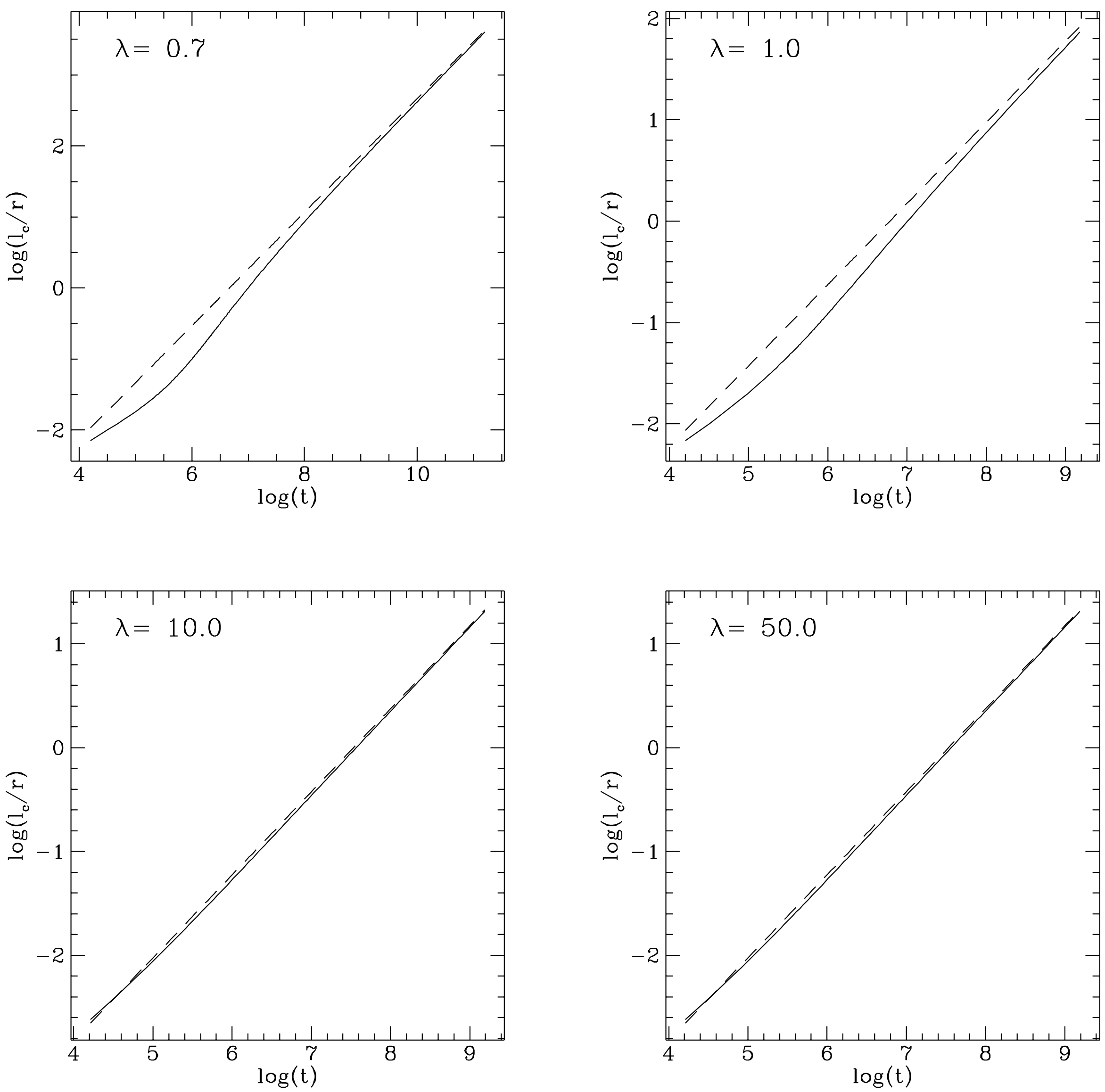


Figura IV.1: Cuando el parámetro $\lambda > 1/2$, la aproximación de capa delgada deja de ser válida para tiempos suficientemente grandes. Las gráficas muestran la variación de la longitud de enfriamiento (l_c) como función del tiempo, r representa la distancia al choque medida desde la estrella. Las líneas punteadas corresponden a la aproximación asintótica de la ec.(10.9) y las líneas continuas corresponden al cálculo numérico. El tiempo t está medido en años.

§11. Emisión del choque en radio continuo

A continuación analizaremos la forma que tendría una observación hecha en radio continuo del modelo hasta aquí analizado, suponiendo que la emisión de los choques es debida a procesos libre-libre. Utilizando el concepto de temperatura de brillo (T_B) que se define como la temperatura que un cuerpo negro debe tener para emitir la intensidad observada y la aproximación de Rayleigh-Jeans (que es apropiada para frecuencias de radio), se obtiene (Rodríguez, 1990):

$$T_B = T\left(1 - e^{-\tau_\nu}\right), \tag{11.1}$$

donde T es la temperatura a la cual se lleva a cabo el proceso de emisión. La profundidad óptica τ_ν en el continuo, a una frecuencia ν en radio, de una onda de choque con velocidad v_s y densidad prechoque n es (Curiel et al., 1989):

$$\tau_\nu = 9.83 \times 10^{-7} \left(\frac{n}{\mathrm{cm}^{-3}}\right) \left(\frac{v_s}{300\,\mathrm{kms}^{-1}}\right)^{1.68} \left(\frac{T}{10^4\,\mathrm{K}}\right)^{-0.55} \left(\frac{\nu}{5\,\mathrm{GHz}}\right)^{-2.1}. \tag{11.2}$$

Los cálculos para la profundidad óptica del choque del viento estelar muestran que $\tau_\nu \ll 1$, por lo que la ec.(11.1) toma el sencillo aspecto:

$$T_{B_{\widetilde{\tau_\nu \to 0}}} T\tau_\nu. \tag{11.3}$$

Las figs.(IV.2)-(IV.3) muestran distintas proyecciones de isocontornos de temperatura de brillo sobre el plano del cielo para el valor típico $\dot{M}_w = 10^{-7} M_\odot$año^{-1} $(\lambda = 10)$.

§12. Flujo de emisión en radio continuo

A continuación calcularemos el flujo de emisión producido por el choque del viento estelar para el valor utilizado en las fig.(4.2)-(4.3), es decir, para $\dot{M}_w = 10^{-7} M_\odot$año^{-1} $(\lambda = 10)$. En este caso el flujo de emisión que se recibe en el plano del cielo está dado por (Rodríguez, 1990):

$$S_\nu = \frac{2kT\nu^2}{c^2} \int d\Omega \tau_{\nu o}, \tag{12.1}$$

en donde la integral se extiende sobre todo el ángulo sólido Ω que ocupa la superficie del choque en el plano del cielo y c es la velocidad de la luz. La profundidad óptica $\tau_{\nu 0}$ es la observada a través del plano del cielo. Gracias a que $d\Omega\tau_{\nu 0} = da\tau_\nu / D^2$, donde da repesenta el elemento de área y τ_ν la profundidad optica, ambos normales a la superficie del choque y D es la distancia entre el observador y la superficie del choque, la ec.(12.1) puede ponerse como:

$$S_\nu = \frac{2KT\nu^2}{D^2c^2} \int da\tau_\nu. \tag{12.2}$$

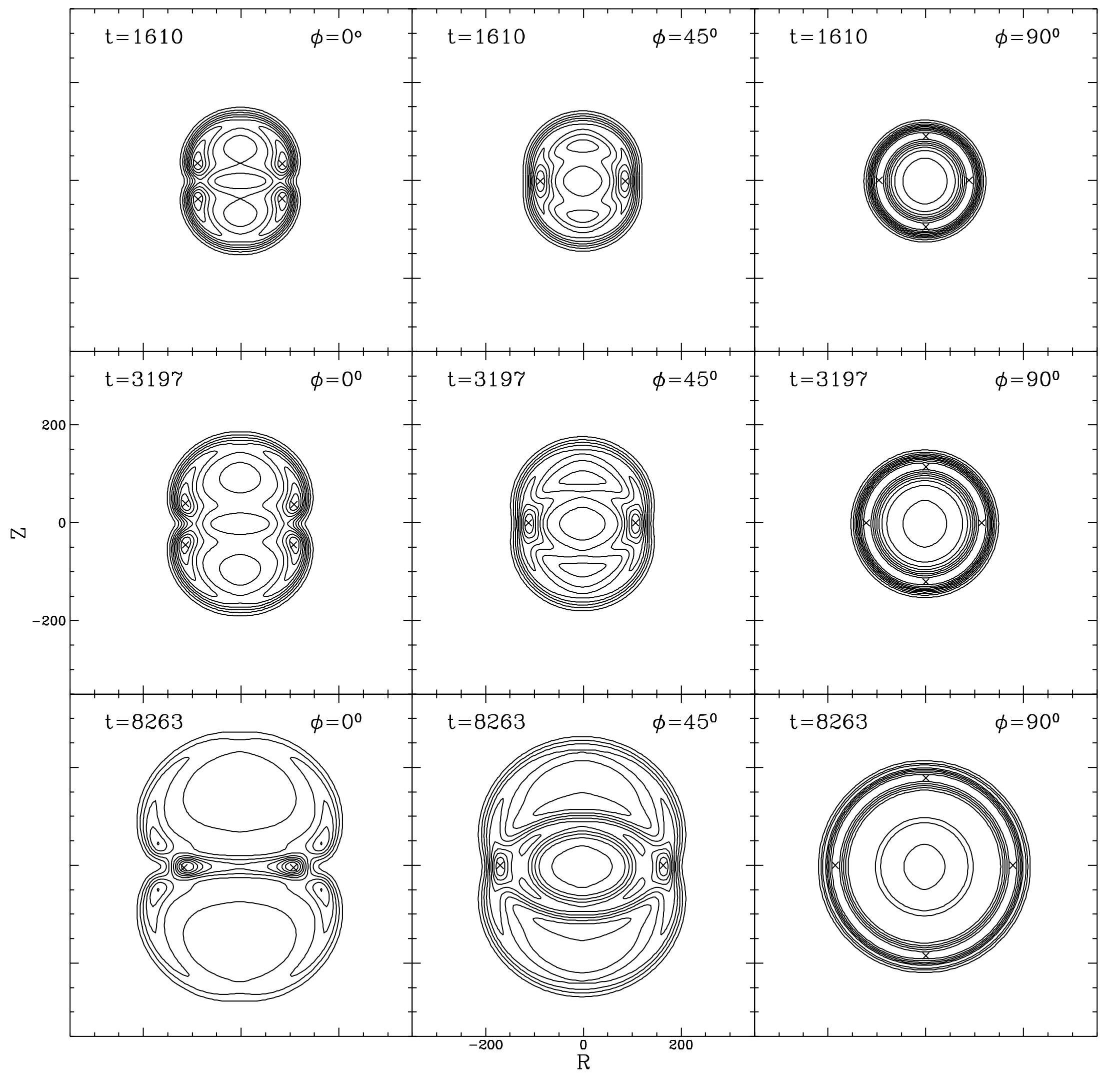


Figura IV.2: Isocontornos de emisión normalizados al máximo (el cual se muestra con cruces), los cuales varían desde el valor 0.1 hasta 1 con $\dot{M}_w = 10^{-7} M_\odot$año^{-1} ($\lambda = 10$) y una resolución $\theta_B = 0''.2$ a una distancia de 150pc. El ángulo ϕ está medido entre el plano ecuatorial y el observador. El tiempo t está medido en años. El radio cilíndrico R y la coordenada Z estan medidos en unidades astronómicas.

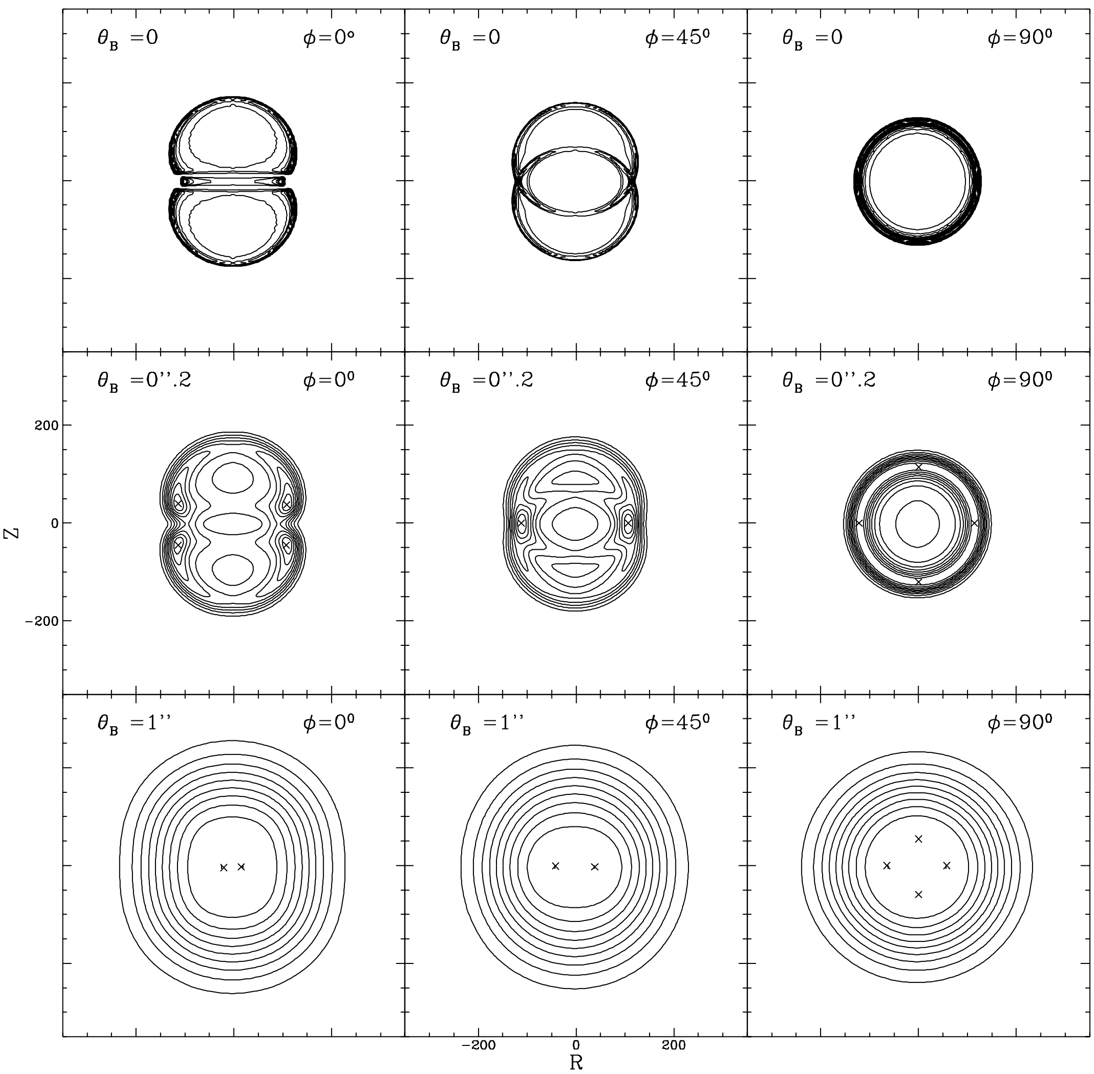


Figura IV.3: Variación de isocontornos de emisión debida a distinta resolución, normalizados al máximo (el cual se muestra con cruces). Los isocontornos varían desde el valor 0.1 hasta 1 con $\dot{M}_w = 10^{-7} M_\odot$ año^{-1} ($\lambda = 10$) y $t = 3197$años. El ángulo ϕ está medido entre el plano ecuatorial y el observador y el ángulo θ_B representa la resolución. El radio cilíndrico R y la coordenada Z están medidos en unidades astronómicas.

Utilizando la ec.(A.7) y la ec.(5.2), la ec.(12.2) toma la forma:

$$S_\nu = \frac{2KT\nu^2}{D^2c^2}\oint \frac{d\theta d\varphi \tau_\nu r \sin\theta}{\sqrt{r^2 + (\partial r/\partial\theta)^2}} \left\{r^2 - (\partial r/\partial\theta)^2\right\}. \tag{12.3}$$

Para el caso de interés, la ec.(12.3) es:

$$\left(\frac{S_\nu}{\mathrm{mJy}}\right) = 0.406 \left(\frac{T}{10^4\,\mathrm{K}}\right)\left(\frac{\nu}{5\,\mathrm{GHz}}\right)^2 \left(\frac{D}{150\,\mathrm{pc}}\right)^{-2}\Phi, \tag{12.4}$$

donde

$$\Phi \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta \tau_\nu r \sin\theta}{\sqrt{r^2 + (\partial r/\partial\theta)^2}} \left\{r^2 - (\partial r/\partial\theta)^2\right\}, \tag{12.5}$$

donde r está medido en unidades astronómicas.

En el caso en que el parámetro $\lambda > 1/2$, dado que la derivada de los puntos geométricos que conforman al choque con respecto al ángulo polar es cero para tiempos suficientemente grandes, el flujo de emisión permanece constante y toma el valor:

$$\left(\frac{S_\nu}{\mathrm{mJy}}\right)_{\widetilde{t\to\infty}} 3.37 \left(\frac{\dot{M}_w}{10^{-7}\,M_\odot \text{año}^{-1}}\right)\left(\frac{v_w}{300\,\mathrm{kms}^{-1}}\right)^{1.68}\left(\frac{T}{10^4\,\mathrm{K}}\right)^2\left(\frac{\nu}{5\,\mathrm{GHz}}\right)^{-0.1}\left(\frac{D}{150\,\mathrm{pc}}\right)^{-2}. \tag{12.6}$$

La fig.(IV.4) muestra el fujo de emisión como función del tiempo para $\dot{M}_w = 10^{-7} M_\odot \text{año}^{-1}$ $(\lambda = 10)$.

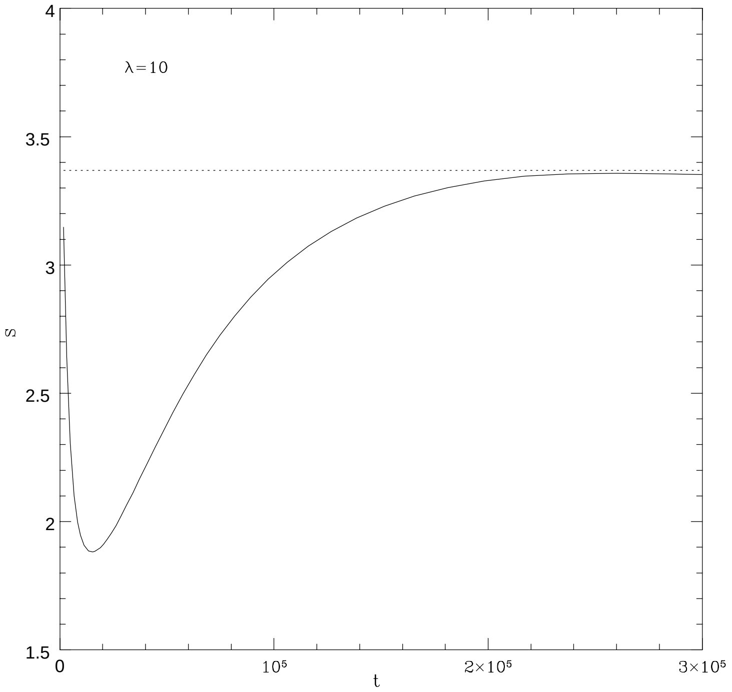


Figura IV.4: Cuando el parámetro $\lambda > 1/2$, el flujo de emisión S alcanza un valor constante para $t \gg 1$. La línea continua representa el cálculo numérico y la punteada el valor asintótico. El tiempo t está medido en años y el flujo S en mJy.

Conclusiones

La interacción del viento estelar con el flujo de acreción con rotación descrito por Ulrich (1976) da origen a dos choques hidrodinámicos fuertes (uno para cada flujo). Bajo la suposición de que ambos choques son fuertes y que ocupan la misma posición espacial, como hemos visto, el problema queda descrito por dos parámetros libres: $\lambda = \dot{M}_w v_w / \dot{M} v_k$ y $\eta = \lambda v_k^2 / v_w^2$. Sin embargo, para estrellas de baja masa y de formación reciente, la descripción del problema, como se ha visto en el capítulo 3, está caracterizada principalmente por el parámetro λ.

La suposición de capa delgada post-choque del flujo del viento estelar, implícita en el párrafo anterior, es válida para la condición $\lambda \leq 1/2$, donde se alcanza la situación estacionaria. Cuando $\lambda > 1/2$ los choques no convergen hacia una configuración estacionaria, sino que crecen de manera ilimitada obteniendo un aspecto esférico, a tiempos suficientemente grandes, y la suposición de capa delgada únicamente es válida para tiempos suficientemente pequeños.

Para valores típicos de estrellas de baja masa y de formación reciente, como hemos visto en el capítulo 4, el problema queda descrito por el valor $\lambda = 10$. Para este mismo caso, el flujo de emisión a tiempos suficientemente grandes ($\sim 2.5 \times 10^5$años) toma el valor constante $S_\nu = 3.37$ mJy.

Cabe hacer notar que el trabajo aquí expuesto es un primer paso para analizar la interacción del flujo de acreción rotacional descrito por Ulrich, con el viento estelar. Trabajos posteriores deberían incluir la presión producida por fuerzas centrífugas para balancear las ec.(2.1) y (3.2), así como un detallado análisis de la zona post-choque para cada flujo.

Apéndice

§A. Cantidades hidrodinámicas en el flujo de acreción

A continuación calcularemos el campo de velocidades en el flujo de acreción descrito en la sección §1. La diferencial de la posición de una partícula en coordenadas esféricas es:

$$d\vec{r} = dr\widehat{e}_r + rd\theta\widehat{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\widehat{e}_\varphi, \tag{A.1}$$

donde $\widehat{e}_i$ $(i = r, \theta, \varphi)$ es un vector unitario en la dirección i. El valor correspondiente de la velocidad se obtiene de la ec.(A.1) dividiendo por la diferencial del tiempo dt.

La solución al potencial central Newtoniano con energía cero, como se manifiesta en la ec.(2.1) se da a continuación (Landau & Lifshitz, 1989):

$$r = \frac{\mathfrak{R}}{1 + \cos\varphi'}, \tag{A.2}$$

donde la variable primada se refiere a las coordenada que describe la trayectoria de una partícula de fluido sobre el plano de la parábola (fig.(I.1)) y $\mathfrak{R} = \Gamma_n^2/GM$, siendo Γ_n el momento angular normal al plano de la trayectoria.

El material que se acreta hacia la estrella y el disco, lejos de la estrella (a la distancia r_∞) tiene un momento angular Γ. A esta distancia, la velocidad de la partícula de fluido es $\vec{v}_\infty = \dot{\varphi} r_\infty \sin\theta_0 \widehat{e}_\varphi$. De esta manera el momento angular inicial está relacionado con el momento angular normal al plano de la trayectoria por:

$$\Gamma = \Gamma_n sen\theta_0. \tag{A.3}$$

Las coordenadas primadas, están relacionadas con las no primadas mediante transformaciones lineales sencillas que involucran rotaciones, de las cuales se obtiene: $\cos\varphi' = -\sin\varphi\sin\theta/\sin\theta_0$, $\sin\varphi = \tan\theta_0/\tan\theta$. Utilizando la ec.(A.2), la trayectoria de las partículas expresada en las coordenadas no primadas es:

$$\frac{r}{r_d} = \frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)}. \tag{A.4}$$

Utilizando la ec.(A.1) y el valor del momento angular del material en acreción, así como la ec.(A.4), se encuentra fácilmente el valor de la velocidad azimutal. Con esta última y la ec.(2.1) se obtiene entonces el campo de velocidades (Ulrich, 1976):

$$v_r = -\left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}\left(1+\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^{1/2},$$
$$v_\theta = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}\frac{\cos\theta_0-\cos\theta}{\sin\theta}\left(1+\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^{1/2},$$
$$v_\varphi = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}\left(1-\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^{1/2}\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}. \tag{A.5}$$

Para encontrar el campo de densidades utilicemos la conservación de masa a través de un tubo de corriente, es decir:

$$\rho\vec{v}\cdot d\vec{a}\bigg|_{r=r_\infty} = \rho\vec{v}\cdot d\vec{a}\bigg|_{r}, \tag{A.6}$$

donde el elemento de área está dado por:

$$d\vec{a} = r^2\sin\theta d\theta d\varphi\widehat{e}_r + r\sin\theta dr d\varphi\widehat{e}_\theta + r dr d\theta\widehat{e}_\varphi. \tag{A.7}$$

Como hemos supuesto hasta ahora, lejos de la estrella el material se acreta hacia la estrella de manera uniforme y constante en el tiempo, por lo que:

$$\dot{M} = 4\pi\rho_\infty|v_r|r_\infty^2 = \text{const}, \tag{A.8}$$

donde $\dot{M}$ representa la tasa de acreción. Por otra parte, para un radio fijo, de la ec.(A.4) se obtiene que:

$$\sin\theta d\theta = \left\{1+\zeta^{-1}\left(-1+3\cos^2\theta_0\right)\right\}\sin\theta_0 d\theta_0, \tag{A.9}$$

donde $\zeta = r/r_d$. Utilizando la ec.(A.6), eq.(A.8) y la ec.(A.9) se encuentra el valor de la densidad como función de la posición:

$$\rho = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2|v_r|}\left\{1+\zeta^{-1}\left(-1+3\cos^2\theta_0\right)\right\}^{-1}. \tag{A.10}$$

§B. Solución de una ecuación cúbica

Consideremos la ecuación cúbica

$$x^3 \pm 3\alpha x + 2\beta = 0, \tag{B.1}$$

que es la forma reducida de Cardan para cualquier ecuación algebraica de tercer orden, donde en este caso $\alpha > 0$. Una forma sencilla de encontrar las soluciones de la ec.(B.1) es la siguiente:

(I) *Signo + en la ec.*(B.1) . Utilicemos la conocida relación trigonométrica:

$$\mathrm{sh}3t = 4\mathrm{sh}^3 t + 3\mathrm{sh}t, \tag{B.2}$$

y hagamos:

$$\mathrm{sh}3t = q, \qquad \mathrm{sh}t = \lambda x. \tag{B.3}$$

Sustituyendo las ec.(B.3) en la ec.(B.2) obtenemos:

$$x^3 + \frac{3}{4\lambda^2}x - \frac{q}{4\lambda^3} = 0. \tag{B.4}$$

Identificando la ec.(B.4) con la ec.(B.1) obtenemos:

$$\lambda = \frac{1}{2\alpha^{1/2}}, \quad q = -\frac{\beta}{\alpha^{3/2}}, \tag{B.5}$$

y entonces al sustituir la ec.(B.5) en la ec.(B.3) obtenemos la solución

$$x = 2\alpha^{1/2}\mathrm{sh}\left\{\frac{1}{3}\mathrm{ash}\left(-\frac{\beta}{\alpha^{3/2}}\right)\right\}. \tag{B.6}$$

(II) *Signo* $-$ *y* $\beta^2 - \alpha^3 > 0$ *en la ec.*(B.1) . Análogamente al inciso anterior, utilicemos la fórmula $\mathrm{ch}3t = 4\mathrm{ch}^3 t - 3\mathrm{ch}t$ y hagamos $\mathrm{ch}3t = q$, $\mathrm{ch}t = \lambda x$. Entonces de la misma forma que antes se obtiene $q = -\beta/\alpha^{3/2}$, $\lambda = 1/2\alpha^{1/2}$, que finalmente lleva a la solución:

$$x = 2\alpha^{1/2}\mathrm{ch}\left\{\frac{1}{3}\mathrm{ach}\left(-\frac{\beta}{\alpha^{3/2}}\right)\right\}. \tag{B.7}$$

(III) *Signo* $-$ *y* $\beta^2 - \alpha^3 < 0$ *en la ec.*(B.1). Para este caso utilicemos $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$. Haciendo entonces los cambios $\cos 3t = q$, $\cos t = \lambda x$, se obtiene $q = -\beta/\alpha^{3/2}$, $\lambda = 1/2\alpha^{1/2}$, de donde se obtiene la solución:

$$x = 2\alpha^{1/2}\cos\left\{\frac{1}{3}\mathrm{acos}\left(-\frac{\beta}{\alpha^{3/2}}\right)\right\}. \tag{B.8}$$

La ec.(B.6), ec.(B.7) y la ec.(B.8) son las soluciones buscadas a la ec.(B.1). Sin embargo una ecuación algebraica de tercer grado posee tres soluciones, las cuales se manifiestan en las soluciones antes encontradas. Para esto, basta con recordar que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{acos} z &= \pm \mathrm{acos}_p z + 2k\pi, \\
\mathrm{ash} z &= (-)^k \mathrm{ash}_p z + 2k\pi i, \qquad k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots \\
\mathrm{ach} z &= \pm \mathrm{ach}_p z + 2k\pi i,
\end{aligned} \tag{B.9}$$

donde el subíndice p se refiere a la hoja principal de Riemann.

De la ec.(B.6), la ec.(B.7) y la ec.(B.8) junto con la ec.(B.9) vemos que para los casos (I) y (II), se tienen dos raíces complejas y una real. Sin embargo para el caso (III) se tienen tres raíces reales (basta con escoger $k = 0, \pm 1$ por ejemplo).

Para el problema que nos interesa, identifiquemos la ec.(1.18) con la ec.(B.1). Es decir, hagamos:

$$\alpha = \left| \frac{r-1}{3} \right|, \qquad \beta = -\frac{r\cos\theta}{2}, \qquad x = \cos\theta_0. \tag{B.10}$$

Dado que las soluciones que nos interesan deben ser reales, para el caso (I) y (II) basta con escoger $k = 0$. Para la solución en el caso (III), por la simetría del problema, basta con analizar el cuadrante $0 \le \theta \le \pi/2$. Pongamos $\mu = -\beta/\alpha^{3/2}$ y analicemos el comportamiento de la función $\zeta = \cos\{(1/3)\mathrm{acos}\mu + 2k\pi\}$ para $k = 0, \pm 1$. Dado que para $\mu \ge 0$ esperamos que $\zeta \ge 0$, la única opción es escoger $k = 0$, pues sucede que $\zeta(\mu \ge 0, k = 0) > 0$. En otras palabras, hemos mostrado que la solución de la ec.(2.15) es:

$$x = \begin{cases} 2\alpha^{1/2}\mathrm{sh}\left\{\frac{1}{3}\mathrm{ash}\left(-\frac{\beta}{\alpha^{3/2}}\right)\right\}, & \text{signo } + \\ 2\alpha^{1/2}\mathrm{ch}\left\{\frac{1}{3}\mathrm{ach}\left(-\frac{\beta}{\alpha^{3/2}}\right)\right\}, & \text{signo } - \text{ y } \beta^2 - \alpha^3 > 0 \\ 2\alpha^{1/2}\cos\left\{\frac{1}{3}\mathrm{acos}\left(-\frac{\beta}{\alpha^{3/2}}\right)\right\}, & \text{signo } - \text{ y } \beta^2 - \alpha^3 < 0 \end{cases}, \tag{B.11}$$

donde x, α y β están dados por la ec.(B.10).

§C. Método de MaCormack & Paullay (1972)

A continuación explicaremos brevemente un método numérico para resolver temporalmente la ecuación:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = A\frac{\partial r}{\partial \theta} + B, \tag{C.1}$$

para un ángulo polar θ fijo, donde en general A y B son funciones que dependen de la posición r, del ángulo θ y del tiempo t. Adjunta con la ec.(C.1) se impone la condición inicial:

$$r\Big|_{t=0} = r_0, \tag{C.2}$$

para todo θ. Generalizando el método de Euler (Abramowitz & Stegun, 1970), la solución avanzada de la ec.(C.1) es:

$$r(\theta, t+\Delta t) = r(\theta, t) + \left.\frac{\partial r}{\partial t}\right|_{\theta,t} \Delta t, \tag{C.3}$$

donde Δt es un pequeño intervalo de tiempo. Con ayuda de la ec.(C.1) la ec.(C.3) puede escribirse como:

$$r(\theta, t+\Delta t) = r(\theta, t) + \left(A\frac{\partial r}{\partial \theta} + B\right)_{\theta,t} \Delta t. \tag{C.4}$$

En la práctica sucede que el cálculo de $\partial r/\partial\theta$ debe hacerse de manera discreta, que no se considera en la ec.(C.4). Un método que considera el cálculo de la derivada de la posición con respecto del ángulo polar discretamente es el método de MaCormack & Paullay (1972), que describiremos a continuación.

El problema en cuestión está caracterizado por las cantidades A, B, r, θ. De aquí se pueden construir dos tiempos: $r/|B|$ y $\Delta\theta/|A|$, donde $\Delta\theta = (\theta_{max} - \theta_{min})/n$ y θ_{max} y θ_{min} se refieren a los valores del ángulo polar máximo y mínimo respectivamente, n es un número entero suficientemente grande. De esta manera, el intervalo de tiempo Δt se elige como:

$$\Delta t = \zeta \min\left\{\frac{r(\theta_i)}{|B|}, \frac{\Delta\theta}{|A|}\right\}_{i=0}^{i=n}, \tag{C.5}$$

donde ζ es un número suficientemente pequeño y $\theta_i = i\Delta\theta + \theta_{min}$ $(i = 0, 1, \ldots n)$.

Para calcular el valor de la posición r al avanzar el tiempo Δt, primero se utiliza la ec.(C.4) calculando la derivada de manera discreta hacia la derecha, excepto en el borde, donde se calcula hacia la izquierda, obteniendo así el valor $r_d(\theta_i)$. A esta posición avanzada se le avanza nuevamente en el intervalo de tiempo Δt, utilizando la ec.(C.4) y calculando la derivada de manera discreta hacia la izquierda, excepto en el borde, donde se calcula hacia la derecha, obteniendo el valor $r_l(\theta_i)$. Se puede mostrar que la posición:

$$r(\theta_i, t+\Delta t) = \frac{1}{2}\{r_d(\theta_i) + r_l(\theta_i)\}, \tag{C.6}$$

coincide con la solución de la ec.(C.1) expandida en serie de potencias hasta segundo orden temporal y espacialmente.

En la práctica suele suceder que la solución obtenida con la ec.(C.6) presenta picos. Para suavizar estas soluciones se utiliza un método conocido como corrector de flujo (Boris & Book, 1973, 1976), que describiremos a continuación. Consideremos:

$$
\begin{aligned}
R(\theta_i, t+\Delta t) &= r(\theta_i, t+\Delta t) + \frac{1}{4}\{r(\theta_{i+1}, t+\Delta t) - r(\theta_{i-1}, t+\Delta t)\}, \\
R(\theta_0, t+\Delta t) &= \frac{1}{2}\{r(\theta_0, t+\Delta t) + r(\theta_1, t+\Delta t)\}, \\
R(\theta_n, t+\Delta t) &= \frac{1}{2}\{r(\theta_{n-1}, t+\Delta t) + r(\theta_n, t+\Delta t)\}.
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

Para analizar la existencia de picos en la solución de la ec.(C.6), hagamos $q_i \equiv r(\theta_i, t+\Delta t) - r(\theta_{i-1}, t+\Delta t)$ y analicemos distintos casos:

(I) $q_i q_{i+1} < 0$ (existe pico). Se escoge la solución suavizada y avanzada en el tiempo de la ec.(C.1) como:

$$S(\theta_i, t+\Delta t) = R(\theta_i, t+\Delta t), \tag{C.8}$$

con $i = 0, 1, 2, ..., n$.

(II) $q_i q_{i+1} \geq 0$ (no existe pico). Se escoge la solución poco suavizada o no suavizada de la ec.(C.1) como:

$$S(\theta_i, t+\Delta t) = R(\theta_i, t+\Delta t) - \frac{\epsilon}{4}\{r(\theta_{i+1}, t+\Delta t) - r(\theta_{i-1}, t+\Delta t)\}, \tag{C.9}$$

donde $\epsilon = 1$ es una solución no suavizada y $\epsilon \lesssim 1$ es una solución poco suavizada para $i \neq 0, n$ (nosotros utilizamos el valor $\epsilon = 0.9$). En los bordes $(i = 0, n)$ la solución se toma como en la ec.(C.7).

Bibliografía

Abramowitz, M. & Stegun, I. A., 1970. *Handbook of Mathematical Functions*. Handbook of Mathematical Functions, New York: Dover, 1970.

Bondi, H., 1952. On spherically symmetrical accretion. *MNRAS*, **112**, 195+.

Boris, J. & Book, D., 1973. On spherically symmetrical accretion. *J. Comp. Phys.*, **18**, 38+.

Boris, J. & Book, D., 1976. On spherically symmetrical accretion. *J. Comp. Phys.*, **20**, 397+.

Canto, J., D'Alessio, P. & Lizano, S., 1995. The Temperature Distribution of Circumstellar Disks. In *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*, vol. 1, 217+.

Canto, J., Tenorio-Tagle, G. & Rozyczka, M., 1988. The formation of interstellar jets by the convergence of supersonic conical flows. *Astronomy and Astrophysics*, **192**, 287–294.

Curiel, S., Rodríguez, L. F., Bohigas, J., Roth, M. & Canto, J., 1989. Extended radio continuum emission associated with V645 CYG and MWC 1080. *Astrophysics Letters*, **27**, 299–309.

Hartigan, P., Raymond, J. & Hartmann, L., 1987. Radiative bow shock models of Herbig-Haro objects. *ApJ*, **316**, 323–348.

Landau, L. & Lifshitz, E., 1989. *Mechanics*, vol. 1 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon, 3rd ed.

Landau, L. & Lifshitz, E., 1995. *Fluid Mechanics*, vol. 6 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon, 2nd ed.

MaCormack, R. & Paullay, A., 1972. On spherically symmetrical accretion. *AIAA Journal*, **72**, 154+.

Rodríguez, L., 1990. Radio Astronomía –Notas de Curso–.

Ulrich, R. K., 1976. An infall model for the T Tauri phenomenon. *ApJ*, **210**, 377–391.