Introducción a la hidrodinámica

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

Instituto de Astronomía

Universidad Nacional Autónoma

de México

Noviembre, 2002

Índice general

Índice general 3

Índice de figuras 5

Prefacio 7

Copyright 9

Agradecimientos 11

§1. Notación de Einstein . . . 15
§2. Fluidos . . . 17
§3. Formalismo . . . 18
§4. Ecuación de continuidad . . . 19
§5. Ecuación de Euler . . . 21
§6. Hidrostática . . . 23
§7. Teorema de Bernoulli . . . 26
§8. Conservación de la circulación . . . 32
§9. Fluidos irrotacionales . . . 34
§10. Fluidos incompresibles . . . 36
§11. Ondas sonoras . . . 37
§12. Flujos supersónicos . . . 43
§13. Cosmología Newtoniana . . . 47
§14. Análisis dimensional . . . 49

Apéndice: GNU Free Documentation License 58

§15. Applicability and Definitions . . . 58
§16. Verbatim Copying . . . 59
§17. Copying in Quantity . . . 60
§18. Modifications . . . 60
§19. Combining Documents . . . 62

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

§20. Collections of Documents 63
§21. Aggregation With Independent Works 63
§22. Translation 63
§23. Termination 63
§24. Future Revisions of This License 64

Bibliografía **65**

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

Índice de figuras

1. Flujo a través de una superficie infinitesimal 20
2. Superficies de vorticidad 35
3. Línea de corriente en un tinaco 37
4. Caricatura del efecto Doppler 42
5. Características y número de Mach 43

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

Prefacio

Este documento fue escrito por Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx> (http://www.astroscu.unam.mx/~sergio).

Estas notas que yo escribí para el curso introductorio (propedéutico) a la maestría en astronomía en el Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) fueron hechas utilizando LaTeX-2e. Todo el software utilizado fue software libre (http://www.gnu.org) y Debian (http://www.debian.org), el sistema operativo de la Fundación de Software Libre GNU (http://www.fsf.org).

Este documento fue primeramente escrito para estudiantes del segundo año de la licenciatura en física en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México y se encuentra en su versión original en http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/cof. Los cambios hechos fueron modificaciones necesarias y adecuadas para estudiantes de la maestría en astronomía. El curso para maestría está diseñado para ser enseñado en 10 horas de clase.

Diversas versiones de este documento (incluyendo las gráficas en colores y demás -si es que estás viendo este documento en blanco y negro) pueden encontrarse en http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/fluidos. Todo este documento es copyright ©Sergio Mendoza y está basado en las ideas de libertad de enseñanza y educación (ver la sección copyright).

Cualquier sugerencia y correcciones sobre las notas será bienvenida para su inclusión.

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>
http://www.astroscu.unam.mx/~sergio
Instituto de Astronomía
Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria
Distrito Federal
México
Última Modificación: Sun Nov 24 22:44:10 UTC 2002

Copyright

Copyright © 2002 Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx> (http://www.astroscu.unam.mx/~sergio). Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, with no Front-Cover Texts, and with no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section (appendix) entitled "GNU Free Documentation License".

For information about the Free Sofware Foundation visit: http://www.fsf.org. For information on GNU visit: http://www.gnu.org. The "GNU Free Documentation Licence" can be obtained in: http://www.gnu.org/licenses/licenses.html#FDL

This document is available for download in its original format in the following URL: http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/fluidos. This document is a modification of the one available in this URL: http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/cof.

Copyright © 2002 Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx> (http://www.astroscu.unam.mx/~sergio). Se otorga permiso para copiar, distribuir y/o modificar este documento bajo los términos de la Licencia de Documentación Libre GNU (GNU Free Documentation Licence), Versión 1.1 o cualquier otra versión publicada por la Fundación de Software Libre (Free Software Foundation); con no Secciones Invariantes (Invariant Sections), con no Textos de la Cubierta Frontal (Front-Cover Texts) y con no Textos de la Cubierta Trasera (Back-Cover Texts). Una copia de la licencia se incluye en la sección (apéndice) bajo el título "GNU Free Documentation Licence".

Para información en la Free Sofware Foundation visitar: http://www.fsf.org. Para información en GNU visitar: http://www.gnu.org. La "GNU Free Documentation Licence" puede ser obtenida en: http://www.gnu.org/licenses/licenses.html#FDL

Este documento puede ser encontrado en su forma original en el siguiente URL: http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/fluidos. Este documento es una modificación del documento que se encuentra en este URL: http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/cof.

Agradecimientos

Siempre hay mucho que agradecer, pero quiero que esta sección se utilice para agradecer a la gente que ayude a contribuir al mejoramiento de estas notas. Así es que si alguien encuentra un error (por pequeño que sea) favor de avisarme y su nombre aparecerá aquí. A las personas que modifiquen este documento, les pido que agreguen sus nombres a la lista siguiendo el formato original y de todos aquellos que contribuyan en un futuro al mejoramiento del mismo.

✞ Sergio Mendoza (2002). ➜ <sergio@astroscu.unam.mx> y <sergio@cyberspace.org>. URL: `http://www.astroscu.unam.mx/~sergio`. Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México. Creador original. Agradezco a las siguientes personas por sus correcciones:

(i) *Edward Daniel Reyes (2002)* . Estudiante de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. Dos correcciones tipográficas.

✞ Sergio Mendoza (2002). ➜ <sergio@astroscu.unam.mx>. URL: `http://www.astroscu.unam.mx/~sergio`. Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México. Modificación del curso para estudiantes del segundo año de la carrera de física para utilizarlo en el estudio de la mecánica de fluidos para estudiantes del posgrado en astrofísica de la UNAM. Agradezco a las siguientes personas por sus correcciones:

Dedicado a todos aquellos buscadores de la verdad,
manifestada en la naturaleza y que va mas
allá de lo imaginable.

La mecánica de fluidos es una de las herramientas mas útiles en cualquier rama de la física, pues muchos de los conceptos que originalmente fueron creados en esta rama de la ciencia son heredados en otras más. Este curso está enfocado a estudiantes de física que desean dedicarse a la astrofísica. El libro que mas te puede ayudar en el entendimiento de la mecánica de fluidos es el libro de Landau & Lifshitz (1987). ¡Buena suerte!

§1. Notación de Einstein

Un vector es un conjunto ordenado de tres números a_i (con $i = 1,\ 2,\ 3$) los cuales se denominan por $\mathbf{a} = a_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha$. Aquí estamos utilizando la convención introducida por Einstein, la famosa *notación de Einstein* o *notación de suma implícita* en la cuál dos subíndices (o superíndices) que aparecen juntos en una operación matemática implica sumatoria. Desde ahora y en lo que resta del curso los índices $h,\ i,\ j, \ldots \alpha,\ \beta,\ \gamma$, etc. toman valores $1,\ 2,\ 3$. Los vectores $\hat{\mathbf{e}}_\alpha$ son vectores unitarios en las direcciones $x,\ y,\ z$, o si se prefiere en las direcciones $1,\ 2,\ 3$. Así pues el vector $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{e}}_1 + a_2\hat{\mathbf{e}}_2 + a_3\hat{\mathbf{e}}_3$.

El *producto escalar* de dos vectores es evidentemente:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_\alpha\hat{\mathbf{e}}_\alpha)\cdot(b_\beta\hat{\mathbf{e}}_\beta) \\ &= a_\alpha b_\beta \hat{\mathbf{e}}_\alpha\cdot\hat{\mathbf{e}}_\beta \\ &= a_\alpha b_\beta \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde la *delta de Kronecker* $\delta_{\alpha\beta}$, o el tensor unitario de rango 2 es un objeto de 9 cantidades definidas por $\delta_{\alpha\beta} \equiv 1$ si $\alpha = \beta$ y $\delta_{\alpha\beta} \equiv 0$ si $\alpha \neq \beta$.

El *producto vectorial* de dos vectores es:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} &= (a_\alpha\hat{\mathbf{e}}_\alpha)\wedge(b_\beta\hat{\mathbf{e}}_\beta) \\ &= a_\alpha b_\beta \hat{\mathbf{e}}_\alpha\wedge\hat{\mathbf{e}}_\beta \\ &= a_\alpha b_\beta \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\mathbf{e}}_\gamma, \end{aligned} \tag{1.2}$$

en donde el *tensor unitario completamente antisimétrico* de rango 3, o tensor de Levi–Civita, $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ es un objeto de 27 cantidades. Este tensor es tal que sus componentes cambian signo ante cualquier intercambio de cualquier par de índices. Además, las componentes no nulas del mismo son ± 1. Gracias a su antisimetría las componentes en las cuales aparezcan dos índices repetidos son nulas. En otras palabras, las componentes no nulas son aquellas que poseen todos sus índices diferentes. Es costumbre definir:

$$\epsilon_{123} = +1. \tag{1.3}$$

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

De esta manera los valores de $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ son $+1$ o -1 si los números $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ pueden ser llevados al arreglo $1,\ 2,\ 3$ por un número par o impar de permutaciones respectivamente. Evidentemente el número de todas las posibles permutaciones es $3!$ En otras palabras:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 3! \tag{1.4}$$

En realidad el tensor $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ no es un tensor. Es un *pseudotensor* pues sus componentes se comportan como las de un tensor al hacer una rotación del sistema coordenado. Sin embargo al hacer un cambio de signo en una o tres de las coordenadas (una reflexión), algunas de las componentes de este tensor deberían cambiar. No obstante, estas componentes también quedan iguales ya que el tensor se definió como el mismo en todos los sistemas coordenados. Los pseudotensores de cualquier rango (incluso los de rango 0 que son *pseudoescalares*) se comportan como tensores bajo todas las transformaciones de coordenadas, excepto aquellas que no pueden ser reducidas a rotaciones, es decir, bajo reflexiones.

Puede mostrarse que $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\mu\nu}$ es un tensor verdadero (es decir, no es pseudotensor) de rango 6. Si se contrae uno o mas índices, entonces se obtiene tensores de rango 4, 2 y 0. Obviamente todos estos tensores tienen la misma forma en cualquier sistema de coordenadas. Debido a esto, y ya que el valor de estos tensores es ± 1 para cada una de sus componentes, estos mismos deben de poder expresarse como productos de $\delta_{\alpha\beta}$. En otras palabras:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\beta\gamma} = 2!\,\delta_{\alpha\lambda}, \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\mu\gamma} = 1!\det\begin{bmatrix}\delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu}\\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu}\end{bmatrix}, \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\lambda\mu\nu} = 0!\det\begin{bmatrix}\delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu}\\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu}\\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu}\end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Como ya mencionamos anteriormente, es costumbre abusar del lenguaje y llamar vector al escalar a_α y tensor al escalar $\Pi_{\alpha\beta\gamma\omega}$ ya que, teniendo en mente que los índices varían conforme a lo dicho anteriormente, estos mismos dan razón de ser al vector o al tensor al variar sus índices. Así pues, uno se refiere al vector $\mathbf{a}$ como a_k únicamente.

A manera de ver las ventajas que ofrece la notación de Einstein, mostremos que el rotacional de todo gradiente es cero:

$$\nabla \wedge \nabla = 0. \tag{1.6}$$

Para esto, escribamos $\nabla\wedge\nabla\Psi = (\hat{\mathbf{e}}_k\partial/\partial x_k)\wedge(\hat{\mathbf{e}}_l\partial/\partial x_l)\,\Psi = (\hat{\mathbf{e}}_k\wedge\hat{\mathbf{e}}_l)\,\partial^2\Psi/\partial x_k\partial x_l = \hat{\mathbf{e}}_m\epsilon_{klm}\partial^2\Psi/\partial x_k\partial x_l = -\hat{\mathbf{e}}_m\epsilon_{lkm}\partial^2\Psi/\partial x_k\partial x_l = -\hat{\mathbf{e}}_m\epsilon_{lkm}\partial^2\Psi/\partial x_l\partial x_k = -\hat{\mathbf{e}}_m\epsilon_{klm}\partial^2\Psi/\partial x_k\partial x_l = 0$ ya que el único número que es igual a su negativo es el cero.

El *teorema de Gauss* se puede aplicar a cualquier tensor de rango 1 (un vector), o a cualquier otro tensor de rango mayor:

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

$$\oint F_{\alpha\beta} da_\alpha = \int \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\alpha} dV, \tag{1.7}$$

en donde $F_{\alpha\beta}$ es un tensor de rango 2, da_α es la α–componente del elemento de área cerrada que envuelve al volumen V.

De la misma manera, el *teorema de Stokes*[†] puede escribirse como:

$$\oint F_{\alpha\beta} dl_\alpha = \int \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \epsilon_{\alpha\gamma\eta} da_\eta \tag{1.8}$$

donde dl_α es un elemento de linea y el área a la cual el elemento da_α pertenece es cualquiera que tenga como frontera a la curva por la cual la integral de la derecha es tomada[‡].

Tarea 1

Utilizando la notación de Einstein (suma implícita) demuestra las siguientes identidades:

(I) $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

(II) $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{a}) = 0$

(III) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b}\nabla \wedge \mathbf{a} - \mathbf{a}\nabla \wedge \mathbf{b}$

(IV) $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla\mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge \nabla \wedge \mathbf{b} + \mathbf{b} \wedge \nabla \wedge \mathbf{a}$

(V) $\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b}\nabla \cdot \mathbf{a}$

De esto se sigue que:

$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}$.

Es curioso notar la similitud de esta relación con la el primer inciso de esta tarea.

§2. Fluidos

La *mecánica de fluidos* es la rama de la física que se dedica al estudio del movimiento de los fluidos, tales como los líquidos (agua, aceite, etc) y los gases. Esta rama de la física no es mas que una aplicación generalizada de las leyes de la mecánica a cuerpos que poseen varias partículas que se

[†] El teorema de Stokes es el teorema central de la geometría diferencial. Corresponde precisamente al teorema fundamental del cálculo cuando se aplica sobre una variedad de dimensión uno (una línea) cuya frontera corresponde a dos puntos (los extremos de la línea). Stokes era Profesor Lucasiano de Matemáticas en el departamento de matemáticas de la Universidad de Cambridge e investigador en el Laboratorio de física (mejor conocido como el Laboratorio Cavendish) de la misma Universidad. El teorema de Stokes apareció por primera vez impreso en uno de los exámenes de matemáticas tomado por Maxwell. Evidentemente, esto fue de gran importancia para el desarrollo de la teoría del electromagnetismo. La demostración explícita mas antigua que se conoce parece ser aquella que en una carta Thomson mandó a Stokes en Julio 2 de 1850.

[‡] El teorema de Stokes y el de Gauss son una y la misma cosa. Su unión se da de manera natural en el lenguaje de la geometría diferencial. El teorema de Stokes es esencialmente una generalización del teorema fundamental del cálculo.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

encuentran "amarradas" de tal forma que "fluyen", a diferencia de los sólidos cuyas partículas están amarradas también, pero no fluyen.

La mecánica de fluidos es simplemente una aplicación de la mecánica Newtoniana o Relativista si es que las velocidades características del problema son comparables a la velocidad de la luz en el vacío.

Formalmente la mecánica de fluidos estudia a los líquidos (líquido proviene del Latín y significa *fluir*), como el agua, y a los gases[†], como el aire. El estudio de los líquidos es frecuentemente denominado *hidrodinámica* proveniente de la palabra Griega que significa "los movimientos del agua", y el de los gases *neumática* que proviene de la palabra Griega "los movimientos del aire".

La comunidad científica frecuentemente abusa de los nombres y denomina *hidrodinámica*[‡] a la mecánica de fluidos. Sin embargo en algunas ramas de la ingeniería y la física esta igualdad de términos **no** es válida. Para nuestros propósitos no haremos distinciones entre la palabra hidrodinámica y mecánica de fluidos a menos que sea necesario.

§3. Formalismo

En lo sucesivo hablaremos de una *partícula de fluido* (en ocasiones la gente habla de un *elemento de fluido* para no abusar del lenguaje) refiriéndonos a un volumen de fluido excesivamente pequeño, de tal forma que podamos tratarlo como un punto matemático. Físicamente esto significa que una partícula de fluido es un pedazo del fluido mucho mas pequeño que la dimensión característica del fluido en consideración. Por ejemplo, en astrofísica un elemento de fluido puede ser del tamaño del monte Everest si el fluido en consideración es el gas de nuestra galaxia. Evidentemente, una partícula de fluido contiene una cantidad demasiado grande de partículas elementales. Cuando nos refiramos al movimiento de una partícula de fluido lo haremos refiriéndonos no al movimiento individual de cada una de sus partículas elementales (átomos, etc). Al decir que una partícula de fluido se mueve, nos referimos al movimiento de una pequeña porción del fluido que contiene un número elevado de varias moléculas. Lo único que hay que tener en mente es que la partícula de fluido es un punto matemático.

Para poder describir los movimientos de un fluido de manera matemática es necesario saber el valor de ciertas propiedades físicas del mismo. La velocidad $\boldsymbol{v}(\mathbf{r},\mathrm{t})$ de cada una de las partículas de fluido es una de las cantidades mas importantes para describir el comportamiento de un fluido. La función $\boldsymbol{v}(\mathbf{r},\mathrm{t})$ representa un *campo vectorial* y de ahora en adelante lo llamaremos el *campo de velocidades del fluido* o simplemente la *velocidad del fluido*. El campo de velocidades depende no solamente de la posición $\mathbf{r} = (\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ z)$, sino también del tiempo t. La densidad $\rho(\mathbf{r},\ \mathrm{t})$ y la presión $\mathrm{p} = (\mathbf{r},\ \mathrm{t})$ son campos escalares y son las variables termodinámicas más utilizadas para describir a un fluido. Así pues, la descripción de un fluido queda totalmente determinada mediante las tres componentes de velocidad

[†]La palabra gas fue inventada por el químico Flamenco Jean Baptista van Helmont quien la derivó aparentemente de la palabra Griega caos.

[‡]La palabra *hidrodinámica* fue concebida por el matemático suizo Daniel Bernoulli en 1738.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

$\boldsymbol{v}(\mathbf{r},\ \mathrm{t})$, la densidad $\rho(\mathbf{r},\ \mathrm{t})$ y la presión $\mathrm{p}(\mathbf{r},\mathrm{t})$[†].

Es importante enfatizar que la velocidad $\boldsymbol{v}(\mathbf{r},\ \mathrm{t})$ se refiere a la velocidad de un fluido en un punto especifico del espacio $\mathbf{r}$ al tiempo t. Es decir, se refiere a puntos que están fijos en el espacio (no se mueven con el fluido) y no a partículas del fluido puesto que estas últimas se mueven mientras el tiempo avanza. Lo mismo sucede con la densidad y la presión. ¡**No lo olvides**!

Así pues, para describir a un fluido son necesarias cinco cantidades. Las tres componentes de la velocidad $\boldsymbol{v}(\mathbf{r},\ \mathrm{t})$ y dos cantidades termodinámicas, por ejemplo la presión $\mathrm{p}(\mathbf{r},\ \mathrm{t})$ y la densidad $\rho(\mathbf{r},\ \mathrm{t})$. En otras palabras, en las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de un fluido, deben aparecer estas cinco cantidades. El número de estas ecuaciones es cinco (cinco ecuaciones para cinco incógnitas). A estas ecuaciones se les debe agregar las condiciones de frontera e iniciales al tiempo $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$ por ejemplo.

§4. Ecuación de continuidad

Pasemos ahora a derivar las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica. Primeramente derivaremos la ecuación que describe la conservación de la materia o conservación de masa.

Consideremos un volumen V_0 de fluido. La masa de este fluido está dada por $\int \rho \mathrm{d}V$, tomando la integral a lo largo del volumen V_0. De acuerdo a la fig.(1), la masa de fluido por unidad de tiempo que fluye a través del elemento de área $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ está dada por $\rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$. Debido a que el elemento de área $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ apunta hacia afuera de la superficie, la cantidad $\rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ es positiva si el fluido fluye hacia afuera de la superficie y negativa en caso contrario.

De esta manera, la masa total del fluido que fluye hacia afuera a través del volumen V_0 por unidad de tiempo está dada por

$$\oint \rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{4.1}$$

tomada sobre la superficie cerrada S_0. Por otra parte, el decremento de masa del volumen V_0 por unidad de tiempo está dado por

$$-\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\int \rho \mathrm{d}V. \tag{4.2}$$

Igualando la ec.(4.1) con la ec.(4.2) se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\int \rho \mathrm{d}V = -\oint \rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}, \tag{4.3}$$

[†]Formalmente hablando, en lugar de la presión p y la densidad ρ es posible escoger cualesquiera dos variables termodinámicas. Esto se debe a que, con la ecuación de estado termodinámico del fluido y el valor de, digamos ρ y p, las demás cantidades termodinámicas quedan totalmente determinadas.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

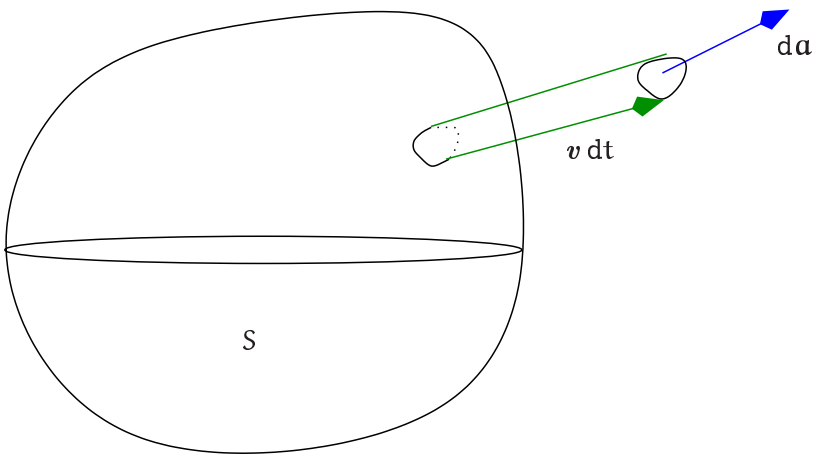

Figura 1: La figura muestra el flujo de masa (o simplemente flujo) de un fluido a través de una pequeña superficie $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ que es parte del volumen V_0 cuya frontera es S_0. El flujo de masa que pasa por el pequeño cilindro de altura $\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ (velocidad por tiempo) y base $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ está dado por $\rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$.

pero utilizando el teorema de Gauss en la integral de superficie se obtiene entonces que $\oint \rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}\,V$. De aquí que la ec.(4.3) pueda escribirse como[†]:

$$\int \mathrm{d}\,V\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v})\right\}=0. \tag{4.4}$$

Las integrales que aparecen en la ec.(4.4), están tomadas a lo largo de un *volumen arbitrario*. En otras palabras, la ec.(4.4) es valida para cualquier volumen. La única forma de que este resultado sea válido es si el integrando de esta ecuación es nulo, es decir

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{4.5}$$

Esta última ecuación es muy importante. Aparece en innumerables ramas de la física y en el caso de la hidrodinámica representa la conservación de masa. A esta relación se le denomina la *ecuación de continuidad*. El vector $\mathbf{j}\equiv\rho\boldsymbol{v}$ se denomina frecuentemente *densidad de flujo de masa* o simplemente *densidad de flujo*. Esta densidad de flujo tiene dimensiones de masa entre unidad de área, entre unidad de tiempo. Dicho de otro modo, el vector densidad de flujo mide la cantidad de masa que fluye por una unidad de área ortogonal al vector velocidad, en una unidad de tiempo, en la dirección del vector velocidad.

[†]La derivada parcial con respecto al tiempo que actúa sobre la integral del lado izquierdo en la ec.(4.3) puede meterse sin ningún problema en la integral. Como la derivada y la integral son límites, en este caso es posible intercambiar el signo de integral por el de derivada. Si la integral fuese tomada sobre el tiempo, entonces habría que derivar no solo al integrando de la integral, sino también al elemento de integración.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

§5. Ecuación de Euler

Pasemos a derivar ahora la ecuación de movimiento (ecuación de Newton) que describe a un fluido. Para esto, recordemos el *Principio de Pascal*, que define a la presión: "*la presión que se ejerce sobre una porción del fluido es la misma en todas direcciones y es perpendicular a la superficie sobre la que actúa*". Matemáticamente, esto significa que la fuerza total que actúa sobre un volumen de fluido está dada por:

$$-\oint \mathrm{p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}, \tag{5.1}$$

donde la integral está tomada sobre la superficie que es frontera al volumen en consideración. Por la ley de Newton, la ec.(5.1) debe ser igual a

$$\int \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{d}V. \tag{5.2}$$

Igualando las ecs.(5.1)-(5.2) se sigue entonces que

$$\int \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{d}V = -\oint \mathrm{p}\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}. \tag{5.3}$$

La integral de superficie en el lado derecho en la ec.(5.3) puede ser transformada en una integral de volumen utilizando el teorema de Gauss, ec.(1.7), y el hecho de que $\mathrm{P}\,\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{P}\,\mathrm{d}a_\mathrm{k}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\mathrm{k} = \mathrm{P}\,\delta_{\mathrm{kl}}\,\mathrm{d}a_\mathrm{l}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\mathrm{k}$, para obtener:

$$\int \left\{ \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dt}} + \nabla \mathrm{P} \right\} \mathrm{d}V = 0. \tag{5.4}$$

Dada la arbitrariedad del volumen de integración se sigue que:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dt}} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,\mathrm{P}. \tag{5.5}$$

La derivada con respecto al tiempo que está aplicada a la velocidad en el lado izquierdo de la ec.(5.5) es una derivada total. Esta derivada no denota la taza de cambio de la velocidad del fluido con respecto a un punto en el espacio. Muy por el contrario, representa la taza de cambio de la velocidad de una partícula de fluido dada a medida que esta se mueve en el espacio. Esta derivada tiene que estar expresada en términos de cantidades que se refieren a puntos fijos en el espacio. De esta manera, la diferencial $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ en la velocidad de una partícula de fluido durante el intervalo de tiempo dt está dada por dos partes. La primera es el cambio de la velocidad $\boldsymbol{v}$ durante el tiempo dt en una posición fija, es decir, está dada por $(\partial \boldsymbol{v}/\partial \mathrm{t})\mathrm{dt}$. La segunda tiene que ver con la diferencia de las velocidades (al mismo tiempo) de dos puntos separados por $\mathrm{d}\mathbf{r}$. Aquí el vector $\mathrm{d}\mathbf{r}$ es la distancia recorrida por la partícula de fluido en cuestión durante el tiempo dt. Así esta segunda parte está dada por $\mathrm{d}x_\mathrm{k}(\partial \boldsymbol{v}/\partial x_\mathrm{k}) = (\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$. De esta manera la diferencial de la velocidad está dada por

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{dt} + (\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}.$$

Dividiendo esta última relación por dt se obtiene la *derivada total*[†] de la velocidad:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mathrm{t}} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}. \tag{5.6}$$

Sustituyendo la ec.(5.6) en la ec.(5.5) se obtiene la ecuación de movimiento (ecuación de Newton) para un fluido, mejor conocida como la *ecuación de Euler*:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mathrm{t}} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,\mathrm{p}. \tag{5.7}$$

En el caso en que la gravedad propia del gas sea tomada en cuenta, entonces el lado derecho de la ecuación de Euler debe modificarse ligeramente añadiéndole la aceleración gravitacional $\mathbf{g} = -\mathbf{grad}\,\phi$, donde ϕ es el potencial gravitacional:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \mathrm{t}} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,\mathrm{P} + \mathbf{g}. \tag{5.8}$$

En la derivación de la ecuación de movimiento (ecuación de Euler) no hemos tomado en cuenta disipaciones de energía que pudieran ocurrir debido a la fricción entre las distintas partículas del fluido durante su movimiento. Es decir, hemos considerado que el fluido no posee *viscosidad*. Tampoco hemos tomado en cuenta el hecho de que exista una transferencia de calor entre las distintas partes del fluido (*conductividad térmica*). Este tipo de fluidos, en los cuales la conductividad térmica y la viscosidad son despreciados, se denominan *ideales*.

Debido a que un fluido ideal no intercambia calor entre sus diversas partes, entonces cada partícula de fluido se mueve de manera adiabática. En otras palabras, si s es la entropía por unidad de masa (*entropía específica*)[‡] la condición de movimiento adiabático está dada por $\mathrm{ds} = 0$. Dividiendo por dt a esta ecuación se sigue que

$$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial \mathrm{s}}{\partial \mathrm{t}} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla \mathrm{s} = 0. \tag{5.9}$$

En sobradas aplicaciones es útil considerar fluidos para los cuales la entropía no solo se mantiene constante a lo largo de la trayectoria de una partícula de fluido como lo muestra la ec.(5.9). Esta ecuación

[†]Esta derivada se denomina también *derivada substancial* y mas frecuentemente *derivada Lagrangiana*. Este último nombre no es casualidad. Existen coordenadas para describir a un fluido que se mueven con el mismo (*coordenadas Lagrangianas*). Esto es como describir el tráfico de una avenida con respecto a un automóvil que fluye sobre la misma. Nosotros hemos descrito a un fluido con respecto a puntos fijos de un sistema de referencia (*coordenadas Eulerianas*). Siguiendo la analogía de la avenida, esto es como describir el tráfico en una avenida con respecto a un puente fijo sobre la misma.

[‡]En mecánica de fluidos las cantidades termodinámicas son generalmente referidas con respecto a una unidad de masa. Así, se habla de la energía interna por unidad de masa ϵ (energía específica), la entalpía por unidad de masa w (entalpía específica), el volumen específico $(= 1/\rho)$, etc.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

se simplifica para los casos en los que la entropía es una constante a lo largo de todo el fluido y por lo tanto

$$s = \text{const} \tag{5.10}$$

A este tipo de fluidos se les denomina *isentrópicos* y serán de gran utilidad a lo largo del curso.

Al final de la sección §3 mencionamos que para describir a un fluido necesitamos cinco ecuaciones. La ecuación de continuidad cuenta por una. Las tres componentes de la ecuación de Euler cuentan por tres y la ecuación de la conservación de la entropía cuenta por una. En suma, cinco ecuaciones para cinco incógnitas. Así, dadas las condiciones de frontera, la solución existe y es única.

§6. Hidrostática

A manera de ejemplificar el poder de las ecuaciones de la hidrodinámica, consideremos el caso en el cual un fluido se encuentra en equilibrio *hidrostático*. En otras palabras, consideremos un fluido en reposo. De esta manera, la ecuación de Euler, ec.(5.8) toma la forma[†]

$$\mathbf{grad}\, P = \rho \mathbf{g} \tag{6.1}$$

Esta ecuación es importantísima. Describe el equilibrio de las fuerzas de presión (lado izquierdo de la ecuación) con las fuerzas de gravitación. Veamos algunas aplicaciones de esta ecuación.

El caso mas sencillo ocurre cuando $\mathbf{g} = 0$, es decir, cuando no existe un campo gravitacional que actué sobre el fluido (imagina un fluido libre en el espacio). De esta manera, la ec.(6.1) queda como $\nabla P = 0$ y por lo tanto $P =$ const . Este resultado no es de sorprender pues simplemente expresa el principio de Pascal: la presión es la misma en todo el fluido.

Supongamos ahora que el fluido se encuentra sobre la superficie de la tierra (por ejemplo el gas atmosférico, el agua del océano o el café que reposa sobre tu taza). Localmente, en la superficie de la tierra la aceleración gravitacional está dada por $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_z$. Aquí hemos puesto un sistema de referencia de tal forma que el eje z apunta hacia arriba de la superficie de la tierra. De esta manera la ec.(6.1) implica que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{6.2}$$

De las primeras dos ecuaciones se sigue que la presión $p = \text{const}$ para alturas fijas ($z = \text{const}$). La presión en un fluido sobre la superficie de la tierra no varía a alturas fijas. Para ver la variación con la

[†] En términos mas generales se dice que un fluido está en equilibrio hidrostático si $dv/dt = 0$. Esto significa que los distintos constituyentes del fluido se encuentran en *equilibrio mecánico* y por lo tanto la fuerza neta entre los mismos es cero. Por ejemplo, una nube de gas puede estar en equilibrio hidrostático y aún así presentar movimiento de las distintas partículas de fluido en su interior.

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

altura integremos la tercera ecuación para dos alturas (1 y 2) que aparece en la ec.(6.2) para obtener:

$$p_2 - p_1 = g \int_2^1 \rho \, dz. \tag{6.3}$$

ya que g tiene el valor constante de $\sim 10\,m/s^2$ sobre la superficie de la tierra. Como sucede frecuentemente la densidad ρ no varía mucho con la altura z y por lo tanto es posible considerarla constante. De esta manera, la ec.(6.3) puede ser integrada para obtener:

$$p_2 - p_1 = \rho g \, (z_1 - z_2) \, . \tag{6.4}$$

En otras palabras, la presión de un fluido con densidad constante bajo la influencia del campo gravitacional terrestre varía de manera lineal con la altura.

Consideremos ahora una masa gaseosa grande, como la estrella de masa de gas que nos alumbra todos los días en nuestro planeta tierra: el sol. En equilibrio hidrostático la ec.(6.1) es válida y por lo tanto:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \phi. \tag{6.5}$$

La ecuación que describe el campo gravitacional, la ecuación de Poisson está dada por:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \tag{6.6}$$

Así, tomando el divergente de ambos lados de la ec.(6.5) y utilizando la ec.(6.6) se obtiene que:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) = -4\pi G \rho. \tag{6.7}$$

Si consideramos que la estrella no está rotando, entonces su forma será esférica al estar en equilibrio hidrostático. De esta manera todas las cantidades termodinámicas como la presión y la densidad son funciones únicamente del radio r medido desde el centro de la estrella. En otras palabras, las cantidades hidrodinámicas poseen *simetría esférica*. Con esta simetría, la ec.(6.7) puede escribirse (¡hazlo!) como

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho. \tag{6.8}$$

Esta es la ecuación que buscamos. Representa la condición de equilibrio hidrostático (equilibrio mecánico) que una estrella debe poseer considerando simetría esférica.

Existe una forma excesivamente sencilla de llegar a la ec.(6.8). Para esto, consideremos la masa $m(r)$ contenida dentro del cascarón con radio r. Esta masa está dada por:

$$m(r) = \int \rho \, dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \rho(r) dr d\theta d\varphi = 4\pi \int_0^r r^2 \rho(r) dr. \tag{6.9}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

Y por lo tanto:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \tag{6.10}$$

En equilibrio hidrostático y con simetría radial, la ecuación de Euler, ec.(5.8), es simplemente:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = -G\frac{m(r)}{r^2}. \tag{6.11}$$

Multiplicando esta última ecuación por r^2 y derivando con respecto a r se obtiene:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho r^2. \tag{6.12}$$

que es justamente la ec.(6.8).

Tarea 2

1. *En la sección* §12 *veremos con un poco mas detalle lo que es un gas* politrópico. *Por ahora basta con saber que un gas politrópico obedece la relación:*

$$p \propto \rho^{1+1/n}, \tag{6.13}$$

donde el índice politrópico n *es una constante. Por ejemplo, si* $n = 3/2$ *el gas es un gas monoatómico ideal. Cuando* $n = 3$, *el gas representa un gas de fotones*[†]. *Muestra que la ec.*(6.8) *puede ser llevada a la forma*

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n, \tag{6.14}$$

donde

$$\rho \equiv \lambda\theta^n, \qquad r \equiv \alpha\xi, \qquad p = k\rho^{1+1/n} = k\lambda\theta,$$
$$\alpha \equiv \left\{\frac{(n+1)}{4\pi G}\lambda^{1/n-1}\right\}^{1/2}$$

La ec.(6.14) *es una de las ecuaciones mas importantes de la estructura estelar y se denomina* ecuación de Lane–Emden de orden n *y describe la variación de las cantidades hidrodinámicas como función de la posición para una estrella en equilibrio hidrostático.*

[†]Dependiendo de la rama de la astrofísica la ec.(6.13) se escribe a veces como $p \propto \rho^\kappa$ (cf. sección §12). En este caso se denomina a κ el índice politrópico también. Así es que todo esto es un tanto cuanto confuso. Nosotros utilizaremos mas la notación de la ec.(12.7). En esta tarea se utiliza la notación de la ec.(6.13) por conveniencia y simplicidad matemática.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

2. *Las condiciones de frontera usadas en la ec.*(6.14) *en en el caso de una estrella son* $p = \rho = 0$ *en* $r = R$, $dp/dr = 0$ *en* $r = 0$ *y* $\theta = 1$ *en* $r = 0$. *Cuando* $\theta = 0$, *es decir,* $r = R$ *se obtiene que* $\xi = \xi_1(n)$, *donde la función* ξ_1 *depende del índice politrópico en cuestión. Muestra que bajo estas circunstancias, el radio y la masa de una estrella están dados respectivamente por:*

$$R = \alpha\xi_1(n) = \left\{\frac{(n+1)\,k}{4\pi G}\right\}^{1/2} \rho_c^{(1-n)/2n}\xi_1(n), \tag{6.15}$$

$$M(\xi = x_1) = -4\pi\left\{\frac{(n+1)\,k}{4\pi G}\right\}^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n}\left[\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_1}, \tag{6.16}$$

$$\tag{6.17}$$

donde ρ_c *es el valor de la densidad en el centro de la estrella y es tal que* $\lambda = \rho_c$.

3. *Utilizando las ecs.*(6.16)-(6.18) *muestra que al eliminar* ρ_c *se obtiene:*

$$M^{n-1} \propto R^{n-3}k^n \tag{6.18}$$

que tiene el sencillo aspecto cuando k *es constante:*

$$M \propto R^{\frac{n-3}{n-1}}. \tag{6.19}$$

En el caso en que $n = 3$ *(presión de radiación) entonces* M *es constante y* R *no queda determinada. Sin embargo, cuando* $n = 3/2$ *(presión de gas) entonces* $M \propto R^3$.

4. *Finalmente, para una configuración en equilibrio muestra que*

$$\frac{d}{dr}\left(p + \frac{Gm^2(r)}{8\pi r^4}\right) < 0. \tag{6.20}$$

§7. Teorema de Bernoulli

En esta sección mostraremos el equivalente de la conservación de la energía para un caso particular de un fluido ideal: un fluido estacionario. Se dice que un fluido es estacionario si el campo de velocidades no depende explícitamente del tiempo, es decir, si $\partial \boldsymbol{v}/\partial t = 0$. De aquí se sigue (utilizando la ecuación de estado del gas) que (¡demuestralo!) un fluido es estacionario si todas las cantidades hidrodinámicas no dependen del tiempo (ie $\partial/\partial t = 0$).

Consideremos primero el caso de una partícula libre en mecánica Newtoniana. La ecuación de movimiento (ley de Newton) de una partícula libre (ie fuerza total que actúa sobre la partícula igual a cero) de masa m está dada por:

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0. \tag{7.1}$$

Tomando el producto interno de esta ecuación con el vector $\boldsymbol{v}$ se obtiene que $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v}/dt = (1/2)d\boldsymbol{v}^2/dt = 0$. Por lo tanto, la cantidad $v^2/2 = \text{ const }$ a lo largo del recorrido de la partícula. La cantidad $v^2/2$ se denomina la *energía cinética por unida de masa* de la partícula y así se llega a que la energía cinética es una constante a lo largo de la trayectoria de una partícula libre, sobre la cual no actúa ninguna fuerza.

Compliquemos un poco las cosas y pensemos en el caso de una partícula de masa m que se mueve a lo largo de un campo gravitacional con aceleración $\mathbf{g} = -\nabla\phi$, donde ϕ es el potencial escalar gravitacional. De esta manera, la ecuación de Newton está dada por:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\mathbf{g} = -m\nabla\phi. \tag{7.2}$$

Multiplicación escalar de esta ecuación con el vector velocidad implica que:

$$\frac{1}{2}\frac{d\boldsymbol{v}^2}{dt} = -\boldsymbol{v}\cdot\nabla\phi. \tag{7.3}$$

Integrando en el tiempo t (el tiempo en recorrer la trayectoria en cuestión desde la posición inicial a la final) se obtiene:

$$\frac{1}{2}\int d\boldsymbol{v}^2 = -\int dt\,\boldsymbol{v}\cdot\nabla\phi = -\int d\mathbf{r}\cdot\nabla\phi = -\int d\phi,$$

pues $d\mathbf{r}/dt = \boldsymbol{v}$. De esta manera, se obtiene que la cantidad:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \phi = \text{ const}, \tag{7.4}$$

a lo largo de la trayectoria de la partícula en cuestión. La ec.(7.3) representa la ecuación de conservación de la energía. Es por esta razón que al campo escalar ϕ se le denomina la energía potencial (por unidad de masa) del sistema o mas sencillamente el *potencial gravitacional*.

En el caso de la hidrodinámica, la ecuación de movimiento está dada por la ecuación de Euler, ec.(5.8). Antes de multiplicar a esta ecuación escalarmente por $\boldsymbol{v}$ vamos a mostrar dos resultados que nos serán de utilidad.

Primeramente, calculemos:

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \wedge (\nabla \wedge v) &= v_k \hat{\boldsymbol{e}}_k \wedge \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_l} \epsilon_{lmp} \hat{\boldsymbol{e}}_p \right), \\
&= v_k \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \epsilon_{lmp} \epsilon_{kpr} \hat{\boldsymbol{e}}_r, \\
&= -v_k \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \epsilon_{lmp} \epsilon_{krp} \hat{\boldsymbol{e}}_r, \\
&= -v_k \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \det \begin{bmatrix} \delta_{lk} & \delta_{mk} \\ \delta_{lr} & \delta_{mr} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_r \\
&= -v_k \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \left(\delta_{lk} \delta_{mr} - \delta_{lr} \delta_{mk} \right) \hat{\boldsymbol{e}}_r \\
&= -v_l \frac{\partial v_r}{\partial x_l} \hat{\boldsymbol{e}}_r + v_m \frac{\partial v_m}{\partial x_r} \hat{\boldsymbol{e}}_r \\
&= \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}.
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Segundamente, la segunda ley de la termodinámica está dada por:

$$
d\epsilon = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho} \right), \tag{7.6}
$$

donde ϵ es la *energía interna específica* (ie energía interna por unidad de masa), s es la *entropía especifica*, $1/\rho$ es el *volumen específico*, T la temperatura y p la presión del sistema en consideración.

La ec.(7.6) puede escribirse como:

$$
dw = T ds + \left(\frac{1}{\rho} \right) dp, \tag{7.7}
$$

donde $w = \epsilon + p/\rho$ es conocida como la *entalpía* por unidad de masa del sistema o la *función de calor* por unidad de masa. La ec.(7.7) es otra manera de escribir la primera ley de la termodinámica y es la que utilizaremos frecuentemente.

Antes de multiplicar a la ecuación de Euler escalarmente por v sustituyamos la ec.(7.5) en la ec.(5.8) para obtener:

$$
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v} \wedge (\nabla \wedge v) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi. \tag{7.8}
$$

Consideremos ahora que el flujo es adiabático, entonces la ec.(7.8) con ayuda de la ec.(7.7) queda como:

$$
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v} \wedge (\nabla \wedge v) = -\nabla \omega - \nabla \phi. \tag{7.9}
$$

Si tomamos el producto interno de la ec.(7.9) con el vector v se obtiene que:

$$
\frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{v}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}^2 = -v \cdot \nabla \left(\omega + \phi \right). \tag{7.10}
$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

Supongamos ahora que el flujo es estacionario. Así la ec.(7.10) puede escribirse como:

$$\hat{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \omega + \phi \right\} = 0. \tag{7.11}$$

Introduzcamos ahora el concepto de *líneas de corriente*. Estas líneas son tales que el campo de velocidades del fluido es tangente a las mismas. Matemáticamente esto significa que las ecuaciones de las líneas de corriente $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ están dadas por[†]:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \tag{7.12}$$

En el caso de flujo estacionario las líneas de corriente representan las trayectorias de las partículas de fluido al moverse. Este no es el caso para flujo no estacionario. En el caso de un flujo no estacionario las líneas de corriente representan la dirección de la velocidad de las distintas partículas de fluido a un tiempo dado. En el transcurso del tiempo estas líneas se mueven (incluso en posiciones fijas) y por lo tanto no representan la trayectoria de las partículas de fluido.

De la ec.(7.11) se sigue entonces que, como $\hat{\boldsymbol{v}} \cdot \mathbf{grad}$ es la derivada en la dirección de $\hat{\boldsymbol{v}}$, la cantidad:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \omega + \phi = \text{ const}, \tag{7.13}$$

sobre una línea de corriente. Este resultado se conoce como la *ley de Bernoulli* o el *teorema de Bernoulli* o la *ecuación de Bernoulli*. Es importante mencionar que la cantidad del lado izquierdo de la ec.(7.12) es constante para la trayectoria de una partícula dada. En otras palabras, esta constante varía entre distintas líneas de corriente. El significado de la ecuación de Bernoulli es claro. Basta con recordar que la entalpía por unidad de masa está dada por $w = \epsilon + p/\rho$. De esta manera, la ec.(7.12) significa que la suma de la energía cinética por unidad de masa $v^2/2$ mas la energía interna específica ϵ mas el trabajo por unidad de masa hecho para mover la partícula de fluido de una posición inicial a una final p/ρ (recuerda que el trabajo hecho en expander un gas de manera adiabático es igual a pV) mas la energía potencial por unidad de masa ϕ es una cantidad conservada a lo largo de una línea de corriente. De esta manera, la ecuación de Bernoulli resulta una de las identidades mas importantes en la mecánica de fluidos pues representa la *conservación de la energía* para fluidos ideales y estacionarios.

Tarea 3

(1) ***Flujo de energía***. *La energía por unidad de volumen en un fluido está dada por (energía cinética mas energía interna):* $\rho v^2/2 + \rho\epsilon$.

(a) *Muestra que la taza de cambio de la energía cinética por unidad de masa (su derivada parcial*

[†] Aquí lo que mas conviene recordar es que de la definición de velocidad se sigue que $dt = dx_k/v_k$ (¡no suma implícita!).

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

con respecto al tiempo) está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = -\frac{1}{2}v^2\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\cdot\nabla p - \rho\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}), \tag{7.14}$$

utilizando la ecuación de continuidad, ec.(4.5)*, y la ecuación de Euler, eq.*(5.8)*, sin considerar el término gravitacional, ie* $\mathbf{g} = 0$.

(b) Utiliza la ec.(7.5) *y la ec.*(7.7) *para llevar a la ec.*(7.14) *a la forma:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = -\frac{1}{2}\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) - \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + \omega\right) + \rho T\boldsymbol{v}\cdot\nabla s. \tag{7.15}$$

(c) Muestra utilizando la primera ley de la termodinámica, ec.(7.6) *y la ecuación adiabática, ec.*(5.9)*, que*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\epsilon) = \omega\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} = -\omega\nabla\cdot(\rho v) - \rho T\boldsymbol{v}\cdot\nabla s. \tag{7.16}$$

¡No olvides que $\omega = \epsilon + p/\rho$*!*

(d) Combina la ec.(7.15) *con la ec.*(7.16) *y muestra que:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) = -\left(\frac{1}{2}v^2 + \omega\right)\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) - \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + \omega\right),$$

para finalmente obtener

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon\right) = -\nabla\cdot\left\{\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \omega\right)\right\}. \tag{7.17}$$

Esta ecuación es como una ecuación de continuidad para la energía. El vector $\rho\boldsymbol{v}\left(v^2/2 + \omega\right)$ *se denomina el* vector de densidad de energía de flujo[†].

[†]Para entender el significado físico de esta ecuación basta hacer lo mismo que en el caso de la ecuación de continuidad. Si integramos la ec.(7.17) sobre un volumen V arbitrario entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \epsilon\right)dV = -\int\nabla\cdot\left\{\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \omega\right)\right\}dV.$$

Transformando la integral de volumen del lado derecho de esta ecuación a una integral de superficie (la superficie frontera del volumen en consideración) mediante el uso del teorema de Gauss se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \epsilon\right)dV = -\oint d\boldsymbol{a}\cdot\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + \omega\right). \tag{7.18}$$

El lado izquierdo de esta ecuación representa la taza de cambio de la energía de un fluido contenido en un volumen dado. El lado derecho es necesariamente la cantidad de energía que fluye hacia fuera de este volumen por unidad de tiempo. Por esta razón la cantidad:

$$\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) \tag{7.19}$$

se denomina el *vector de densidad de flujo de energía* . La magnitud de este vector representa la cantidad de energía que pasa por la superficie, por unidad de tiempo por unidad de área perpendicular a la velocidad v.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

El hecho de que en el lado derecho de la ec.(7.17) *aparezca la entalpía específica* w *y no la energía interna se debe simplemente a lo siguiente. Si escribimos* $\omega = \epsilon + p/\rho$ *entonces el lado derecho de la ec.*(7.17) *queda como:* $-\int \rho v \left(v^2/2 + \epsilon\right) \cdot d\mathbf{a} - \int p v \cdot d\mathbf{a}$. *El primer término representa la energía cinética e interna que se transporta a través de la superficie por unidad de tiempo, por unidad de masa del fluido. El segundo término es el trabajo* (pV) *por unidad de tiempo que realizan las fuerzas de presión sobre el fluido dentro de la superficie.*

(II) ***Flujo de momento***. *La dirección* i*–ésima del momento por unidad de masa en un fluido está dada por* ρv_i.

(a) *Utilizando la ecuación de continuidad, ec.*(4.5) *y la ecuación de Euler, ec.*(5.8) *con* $\mathbf{g} = 0$ *ambas escritas en su forma de suma implícita, muestra que:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k). \tag{7.20}$$

(b) *Escribe* $\partial p/\partial x_i = \delta_{ik}\partial p/\partial x_k$ *y utiliza el teorema de Gauss para mostrar que la ec.*(7.20) *puede escribirse como:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{7.21}$$

donde el tensor Π_{ik} *está definido por*

$$\Pi_{ik} \equiv p\delta_{ik} + \rho v_i v_k. \tag{7.22}$$

Esta ecuación representa una ecuación de continuidad para el momento del fluido. El tensor Π_{ik} *se denomina el* tensor de densidad de flujo de momento[†].

La energía total de un gas es un escalar y la densidad de energía es un vector (ρv). *El momento* ρv *de un fluido por unidad de masa es un vector y la densidad de flujo de momento es un tensor* Π_{ik}. *Esto es de esperarse si es que vamos a construir una ecuación de continuidad para la energía y otra para el momento*[‡].

[†] Para entender el significado del tensor Π_{ik} integremos a la ec.(7.22) sobre un volumen y apliquemos el teorema de la divergencia, obteniendo así:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV = -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = -\oint \Pi_{ik} da_k. \tag{7.23}$$

El lado izquierdo de la ec.(7.23) representa la taza de cambio de la componente i–ésima del momento contenido dentro del volumen en consideración. Necesariamente el lado derecho de esta ecuación debe ser la cantidad de momento que fluye hacia afuera a través de la superficie frontera por unidad de tiempo. Así, la cantidad $\Pi_{ik}da_k$ es la i–ésima componente del momento que fluye a través del elemento de superficie $d\mathbf{a}$. Si escribimos $da_k = n_k da$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en la dirección del elemento de área $d\mathbf{a}$ entonces el vector

$$\Pi_{ik} n_k = p n_i + \rho v_i v_k n_k. \tag{7.24}$$

representa el flujo de la i–ésima componente del momento por unidad de área.

De esta manera el tensor Π_{ik} representa la i–ésima componente de la cantidad de momento que fluye por unidad de tiempo, por unidad de área perpendicular al eje x_k.

[‡] La ec.(7.17) y la ec.(7.21) pueden reemplazar a la ecuación de continuidad de masa, ec.(4.5), y a la ecuación de Euler,

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

§8. Conservación de la circulación

La integral de línea

$$\Gamma \equiv \oint \mathrm{d}\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{v}, \tag{8.1}$$

tomada alrededor de un circuito cerrado se denomina la *circulación de la velocidad*.

Consideremos ahora que el circuito que aparece en la integral de la ec.(8.1) es un circuito constituido por partículas de fluido. Así, el circuito se moverá en el transcurso del tiempo con el fluido. Calculemos la derivada:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint \boldsymbol{v} \cdot \delta\mathbf{l} = \oint \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v} \cdot \delta\mathbf{l}\right) \tag{8.2}$$

donde hemos escrito a la diferencial $\mathrm{d}\mathbf{l}$ como $\delta\mathbf{l}$ para evitar confusiones. En este caso, como el elemento de línea $\delta\mathbf{l}$ se mueve con el fluido (pues es parte del mismo), entonces la derivada con respecto al tiempo que aparece dentro de la integral en el lado derecho de la ec.(8.2) afecta no solamente a la velocidad $\boldsymbol{v}$ sino también a la diferencial $\delta\mathbf{l}$. De hecho,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v} \cdot \delta\mathbf{l}\right) =& \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \delta\mathbf{l} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta\mathbf{l}\right) \\
=& \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \delta\mathbf{l} + \boldsymbol{v} \cdot \delta\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t} \\
=& \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \delta\mathbf{l} + \boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v} \\
=& \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \delta\mathbf{l} + \frac{1}{2}\delta v^2.
\end{aligned} \tag{8.3}$$

El penúltimo paso de la ec.(8.3) se sigue del hecho de que como $\mathrm{d}\mathbf{l}$ es un elemento de línea de fluido, entonces la cantidad $\mathrm{d}\mathbf{l}/\mathrm{d}t$ es precisamente la velocidad $\boldsymbol{v}$ del fluido en ese punto.

Sustituyendo la ec.(8.3) en la ec.(8.2) se obtiene que:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \delta\mathbf{l}. \tag{8.4}$$

Utilizando el hecho de que para un fluido adiabático la ecuación de Euler está dada por $\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = -\nabla\omega$, entonces la ec.(8.4) toma la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = -\oint \delta\mathbf{l} \cdot \nabla\omega = \oint \delta\omega = 0. \tag{8.5}$$

De esta manera, hemos llegado al resultado importante, conocido como el *teorema de Kelvin de la*

ec.(5.7). El número total de estas ecuaciones es de 1 (ec.(7.17)) +3 (tres componentes de la ec.(7.21)). Combinando a estas con la ecuación adiabática, ec.(5.9) se obtiene un total de cinco ecuaciones, las cinco ecuaciones necesarias y suficientes para resolver el problema de la hidrodinámica en cuestión.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

conservación de la circulación: "para un fluido ideal, la circulación de la velocidad alrededor de un contorno hecho de fluido es una constante":

$$\oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \text{ const}, \tag{8.6}$$

donde el paso intermedio fue obtenido al aplicar el teorema de Stokes a la integral del lado derecho en la ec.(8.6).

Tarea 4

(I) *Muestra que en el caso de un fluido ideal, el tomar el rotacional de la ecuación de Euler, eq.*(5.8) *implica que:*

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \boldsymbol{rot}\ (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\Omega}), \tag{8.7}$$

donde la vorticidad $\boldsymbol{\Omega}$ *del fluido está definida por* $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{v}$. *La ec.*(8.8) *va acompañada del hecho de que:*

$$div\ \boldsymbol{\Omega} = 0, \tag{8.8}$$

pues el divergente de todo rotacional es cero.

Así como se habla de líneas de corriente, también puede hablarse de líneas de vorticidad. Estas se definen como las líneas que son tangentes al vector $\boldsymbol{\Omega}$ *para distintos puntos del espacio. Las líneas de vorticidad son siempre cerradas, o bien nunca terminan y van desde "menos infinito" hasta "mas infinito". Esto se sigue inmediatamente de la ec.*(8.8) *pues* $\int \mathrm{d}V \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = \oint \Omega \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0$ *para cualquier volumen. Si existiera un lugar donde se estuvieran produciendo las líneas de vorticidad esta integral sería diferente de cero.*

(II) *Muestra que para un circuito infinitesimal cerrado, el teorema Kelvin de la conservación de la circulación implica que:*

$$\oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \approx \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \text{ const.} \tag{8.9}$$

El hecho de que el producto $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$ *sea constante a lo largo de la trayectoria del fluido significa intuitivamente que la vorticidad se mueve en conjunto con el fluido. Dicho de otro modo, las líneas de vorticidad se mueven con el fluido*[†]*. Los siguientes incisos te llevarán a mostrar esto.*

(III) *Considera una superficie S de vorticidad, es decir una superficie que contiene líneas de vorticidad cuya tangente en cada punto es el vector* $\boldsymbol{\Omega}$. *Muestra utilizando la ec.*(8.9) *que a medida que el fluido se mueve (y por lo tanto la superficie S se estira, se estrecha y demás) la superficie S permanece como una superficie de vorticidad.*

[†] Por ejemplo, si marcamos una linea de vorticidad con tinta y dejamos que el fluido se mueva, la linea se moverá con el movimiento del fluido. La nueva posición de la línea marcará una nueva línea de vorticidad.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

(IV) *Considera dos superficies de vorticidad que se intersectan en la línea* AB *como se muestra en la fig.*(2). *Con lo demostrado anteriormente muestra que cuando el fluido evoluciona en el tiempo la línea* AB *permanece en la intersección de ambas superficies y que por lo tanto es una línea de vorticidad. De aquí argumenta por qué la vorticidad se dice que se mueve con el fluido (otra manera de decirlo es que la vorticidad está congelada al fluido y por tanto se mueve con el mismo).*

(V) *El hecho de que las líneas de vorticidad estén congeladas al fluido puede mostrarse de la siguiente manera, que es un tanto cuanto mas matemática.*

(a) *Muestra con ayuda de la ecuación de continuidad, ec.*(4.5), *o de alguna otra manera, que la ec.*(8.7) *puede escribirse como:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}. \tag{8.10}$$

(b) *Considera ahora una línea de fluido. Un pedacito de esta línea está dado por* $\delta\mathfrak{l}$. *Muestra que la variación del vector* $\delta\mathfrak{l}$ *en un intervalo* dt *está dada por:*

$$\mathrm{dt}\,(\delta\mathfrak{l}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}. \tag{8.11}$$

De aquí, muestra que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\delta\mathfrak{l}) = (\delta\mathfrak{l}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}. \tag{8.12}$$

Esta relación representa la forma en la que el elemento de línea de fluido (o línea de corriente) varía con respecto al tiempo a medida que el fluido se mueve. Si comparas la ec.(8.12) *con la ec.*(8.10) *es claro que el vector* $\boldsymbol{\Omega}/\rho$ *obedece la misma relación que el vector* $\delta\mathfrak{l}$. *Dicho de otra forma, ambos vectores varían de la misma manera. Por ejemplo, si* $\boldsymbol{\Omega}/\rho$ *es paralelo con* $\delta\mathfrak{l}$ *inicialmente, entonces siempre permanecerán paralelos entre sí.*

(c) *Muestra que si* A *y* B *son dos partículas de fluido infinitecimalmente cercanas entre sí y que se encuentran sobre una línea de vorticidad, entonces* A *y* B *se encontrarán siempre en la línea de vorticidad a medida que el tiempo avanza y el fluido se mueve.*

§9. Fluidos irrotacionales

Se dice que un fluido es irrotacional si la cantidad $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} = 0$ en todo el fluido. Esto significa que la velocidad

$$\boldsymbol{v} = \nabla\Psi, \tag{9.1}$$

para alguna función escalar Ψ que depende de la posición y del tiempo. Este flujo, el llamado *flujo*

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

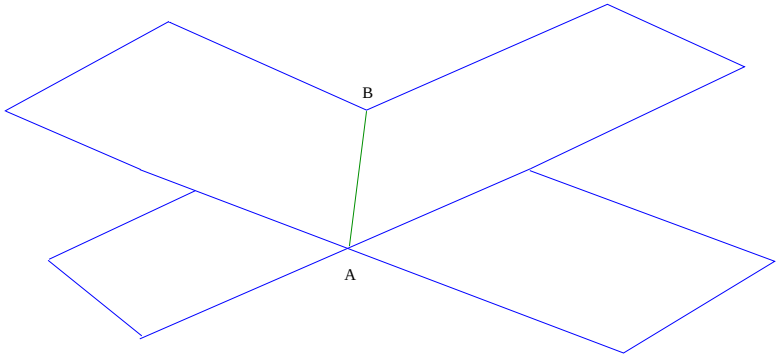

Figura 2: Dos superficies de vorticidad se intersectan en la línea AB. Al evolucionar en el tiempo estas superficies permanecen como superficies de vorticidad y por lo tanto el segmento AB es una línea de vorticidad. De esta manera las líneas de vorticidad permanecen congeladas al fluido.

potencial debe su nombre al hecho de que existe una función potencial (o un campo escalar) Ψ que describe el comportamiento del fluido. Dicho de otro modo, Ψ es el *campo potencial escalar de velocidades*. Utilizando el teorema de la conservación de la circulación de Kelvin para fluidos ideales se sigue que si a un determinado tiempo t el fluido es tal que $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} = 0$, entonces el flujo será irrotacional en todo tiempo. Esto no es cierto para flujos no–adiabáticos, pues la ley de la conservación de la circulación de Kelvin fue obtenida únicamente para fluidos ideales.

En el caso de flujo potencial, la circulación de la velocidad está dada por la siguiente integral:

$$\oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int (\nabla \wedge \boldsymbol{v}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0, \tag{9.2}$$

de acuerdo con el teorema de Stokes. Este resultado es muy importante. Lo que nos quiere decir es que "*en flujo potencial no existen líneas de corriente cerradas*". Esto se debe a que como la tangente a las líneas de corriente es el vector velocidad $\boldsymbol{v}$, entonces la integral $\oint \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$ tomada a lo largo de una línea de corriente cerrada no podría ser cero de ninguna manera.

En el caso de flujo potencial para un fluido ideal, la ec.(7.9) se escribe como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{v}^2 = -\nabla\omega - \nabla\phi. \tag{9.3}$$

Sustituyendo la ec.(9.1) para el primer término del lado izquierdo de la ec.(9.3) se obtiene que

$$\nabla \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \omega + \phi \right\} = 0, \tag{9.4}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

y por lo tanto

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \omega + \phi = \text{ const } . \tag{9.5}$$

En el caso de un flujo estacionario ($\partial/\partial t = 0$), la ec.(9.5) se reduce a la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \omega + \phi = \text{ const } . \tag{9.6}$$

Cabe hacer notar que la constante que aparece en la ec.(9.6) es una constante para todo el fluido. Para el caso de la ecuación de Bernoulli, ec.(7.13), la constante es tomada a lo largo de una línea de corriente y varía para distintas líneas de corriente.

§10. Fluidos incompresibles

Se dice que un fluido es *incompresible* si la densidad no depende de las posiciones, ni del tiempo. Dicho de otra forma, la densidad es una cantidad constante. Esto significa que la ecuación de Euler, ec.(5.8), pueda escribirse como

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) - \nabla\phi. \tag{10.1}$$

Sustituyendo la ec.(7.5) en la ec.(10.1) se obtiene que:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v} \wedge (\nabla \wedge v) = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) - \nabla\phi. \tag{10.2}$$

Esta ecuación es similar a la ec.(7.9) que utilizamos para mostrar el teorema de Bernoulli haciendo el cambio $\omega \rightarrow p/\rho$. De esta manera, podemos decir que si el flujo es estacionario entonces la cantidad

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi = \text{ const } , \tag{10.3}$$

a lo largo de una línea de corriente. Esta es la forma de la ecuación de Bernoulli para un fluido incompresible. Es la mas utilizada en aplicaciones sencillas de la hidrodinámica.

El hecho de que no aparezca el término de energía interna en la ec.(10.3) se debe a lo siguiente. Para el caso de un fluido adiabático e incompresible, para el cual $\rho =$ const, la primera ley de la termodinámica, eq.(7.6) significa que $d\epsilon = 0$, es decir, $\epsilon =$ const . Sustituyendo estos valores en la ecuación de Bernoulli, ec.(7.13), se llega entonces a la ec.(10.3), pues los valores constantes no alteran a la "ecuación de energía".

El ejemplo mas sencillo que existe con la ecuación de Bernoulli es el de calcular la velocidad de salida del agua de un tanque lleno de agua como lo muestra la fig.(3). La presión del agua en los puntos 1 y 2 es igual a la presión atmosférica p_0. Si suponemos que el radio del cilindro del tanque es suficientemente

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

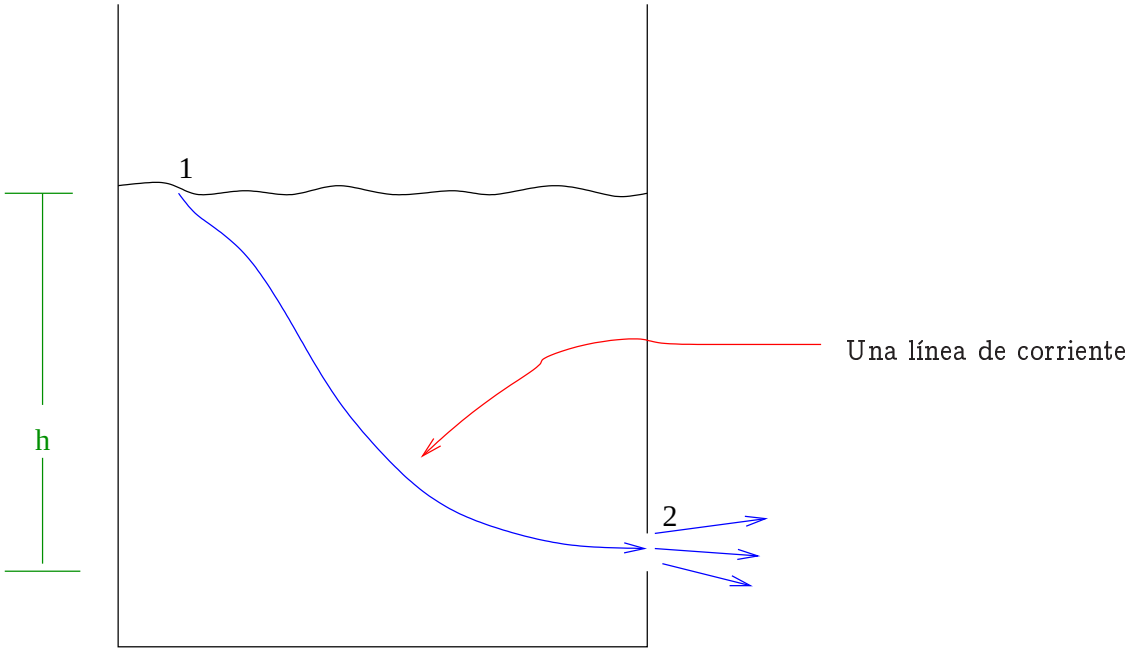

Figura 3: La figura muestra una línea de corriente para el caso de un tanque lleno de agua hasta una altura h. El teorema de Bernoulli puede ser utilizado (ver texto) para saber la velocidad de salida del agua.

grande como para que el nivel del mismo no baje mientras el agua sale por debajo entonces la altura h del agua tiene un valor constante. La densidad del tanque es constante y así la ecuación de Bernoulli está dada por:

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p_0}{\rho} - gh = \text{ const } , \tag{10.4}$$

donde g es el valor de la aceleración gravitacional en la superficie de la tierra y v es la velocidad de salida del fluido (en la posición 2 de la figura) pues la velocidad en la superficie del tanque es nula. De esta manera la velocidad de salida del agua en el agujero del recipiente está dada por $v = \sqrt{2gh}$. Este sencillo resultado tiene nombre y se le conoce como la *ley de Torricelli*.

§11. Ondas sonoras

Consideremos un fluido que se encuentra en reposo, de tal manera que su velocidad inicial sea $\boldsymbol{v}_0 = 0$. La ecuación de continuidad implica entonces que la densidad inicial ρ_0 no depende explícitamente del tiempo. La ecuación de Euler en ausencia de campo gravitacional implica entonces que la presión inicial p_0 depende únicamente del tiempo. Combinando esto con la ecuación de estado $p = p(\rho)$ (a entropía constante) se sigue entonces que p_0 y ρ_0 tienen valores uniformes a lo largo de todo el fluido. Esto ya lo sabíamos pues es justamente el Principio de Pascal: "la presión es uniforme para un fluido en equilibrio

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

hidrostático en ausencia de campos gravitacionales y fuerzas externas".

Hagamos entonces un pequeño movimiento o *perturbación* de estas cantidades fijas. Esta perturbación la haremos de tal forma que las cantidades extras que añadiremos a la velocidad, presión y densidad serán cantidades del primer orden. Para ser exactos, tomemos los nuevos valores de las cantidades hidrodinámicas como sigue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \cancel{\boldsymbol{v}_0} + \boldsymbol{v}', \\ p &= p_0 + p', \\ \rho &= \rho_0 + \rho', \end{aligned} \tag{11.1}$$

donde las cantidades con primas son cantidades pequeñas del primer orden. Para entender mas el significado de estas pequeñas cantidades, estas son como cuando uno realiza una expansión de Taylor. Por ejemplo, consideremos que la presión p es una función de la temperatura T y de la entropía específica s. Entonces, una expansión de Taylor a primer orden daría:

$$p(T,s) \approx p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s dT + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_T ds.$$

La cantidad $p(T,s) - p_0 = p'$ es precisamente lo que nosotros hemos denominado como una perturbación a primer orden. Evidentemente uno podría irse a mas y mas ordenes en la perturbación pero eso implica mas y mas términos y por lo tanto mas y mas complicaciones...

Consideremos además que nuestra perturbación es adiabática, es decir, haremos variar a nuestros valores fijos de presión, densidad y velocidad de manera adiabática hasta que alcancen sus valores nuevos. Si consideramos a la presión $p(\rho, s)$ como una función de la densidad ρ y la entropía s entonces:

$$p' = p - p_0 \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \cancel{\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds}. \tag{11.2}$$

y también, como la presión $\rho(p, s)$ es entonces función de la densidad y la entropía entonces:

$$\rho' = \rho - \rho_0 \approx \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s dp + \cancel{\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p ds}. \tag{11.3}$$

Comparando la ec.(11.2) con la ec.(11.3) se obtiene que:

$$p' = c^2 \rho', \qquad \text{donde} \qquad c^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s. \tag{11.4}$$

Sustituyamos ahora los valores de las nuevas cantidades hidrodinámicas de la ec.(11.1) en la ecuación de continuidad y la de Euler (sin gravedad) y despreciemos términos de orden superior al primer orden. La ecuación de continuidad es:

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v} - \cancel{\nabla \cdot (\rho' \boldsymbol{v})}. \tag{11.5}$$

El segundo término del lado derecho de la ec.(11.5) se cancela puesto que como ρ' y $\boldsymbol{v}$ son cantidades de primer orden, entonces el producto $\rho \boldsymbol{v}$ es una cantidad del segundo orden.

De la misma manera, la ecuación de Euler puede escribirse como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \cancel{\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \nabla \left(p_0 + p'\right) \approxeq -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' = -\frac{c^2}{\rho_0} \nabla \rho'. \tag{11.6}$$

En el último paso de la ec.(11.6) utilizamos la relación entre ρ' y p' dadas por la ec.(11.4). Tomando la derivada con respecto al tiempo de la ec.(11.5) y el divergente de la ec.(11.6) y resolviendo para ρ' se obtiene que:

$$\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \rho' = 0. \tag{11.7}$$

Esta es una ecuación de onda con velocidad c. Por esta razón, la cantidad c se denomina la velocidad del sonido. El operador entre corchetes que aparece en la ec.(11.7) se le denomina en ocasiones *operador D'Alambertiano*[†] en honor a su creador. A partir de la ec.(11.6) es claro que la presión también cumple con una ecuación de onda. Lo mismo ocurre con la velocidad $\boldsymbol{v}$.

La ec.(11.7) en una dimensión (la dimensión x) puede escribirse como:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \rho' = 0. \tag{11.8}$$

Para encontrar la solución a la ec.(11.8) utilicemos las nuevas coordenadas ξ y η dadas por:

$$\xi = x - ct, \qquad \eta = x + ct. \tag{11.9}$$

Entonces como x y t son funciones de ξ y η, utilizando la regla de la cadena se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = -c\frac{\partial}{\partial \xi} + c\frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned} \tag{11.10}$$

De esta manera, las segundas derivadas son:

[†]Sin embargo el grado de D'Alambertiano es totalmente obsoleto cuando se piensa en un espacio de Minkowski, pues este operador resulta ser justamente el operador de Laplace (o laplaciano) definido por $\Delta = \partial^2/\partial x^\mu x_\mu$ para una métrica Lorentziana en un espacio plano, es decir, cuando el tensor métrico es tal que $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-,+,+,+)$.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = c^2\left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 = c^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right\}. \tag{11.11}$$

Sustituyendo la ec.(11.11) en la ecuación de onda para una dimensión, se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{11.12}$$

Integrando esta ecuación una vez se obtiene que $\partial \rho'/\partial \eta = F(\eta)$ para alguna función $F(\eta)$. Integrando nuevamente se obtiene que

$$\rho' = f_1(\eta) + f_2(\xi) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct), \tag{11.13}$$

donde f_1 y f_2 son funciones arbitrarias que dependen de la posición y del tiempo mediante la combinación $x \pm ct$. Esta es la solución mas general de la ecuación de onda. Para entender su significado físico, consideremos el sencillo caso en el cual $\rho' = f_2(x - ct)$ solamente. Entonces al tiempo $t = 0$, se obtiene que $x - ct = x_0$. Para que ρ' vuelva a tener el valor $\rho'(x_0)$ hay que esperar un determinado tiempo t y moverse hasta la posición x de tal forma que $\rho'(x_0) = \rho'(x - ct)$. En otras palabras, el valor de la presión al tiempo inicial vuelve a repetirse tiempo mas tarde (al tiempo t) en otra posición ($x = x_0 + ct$) hacia la derecha. Esto es lo que se conoce como una *onda de sonido*, y es la propiedad que todas las ondas tienen.

Las propiedades básicas de una onda deben ser bien conocidas por ti a estas alturas. Por ejemplo, si ϕ y Ψ son funciones de la posición y del tiempo que satisfacen la ecuación de onda, entonces el *principio de superposición* es válido: la suma $\Psi + \phi$ también satisface la ecuación de onda. También, una de las soluciones mas importantes a la ecuación de onda está dada por lo que se conoce como *ondas monocromáticas* (de una misma frecuencia o longitud de onda):

$$\phi = \mathrm{Re}\left\{\phi_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\right\}, \tag{11.14}$$

donde ϕ_0 satisface la ecuación (sustituye la ec.(11.14) en la ecuación de onda y verifícalo):

$$\nabla^2 \phi_0 + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi_0 = 0. \tag{11.15}$$

La cantidad ω es denominada la frecuencia de la onda. El caso mas sencillo de una onda monocromática es el de una onda plana propagada en la dirección del eje x. Para dicha onda, todas las cantidades son funciones que dependen únicamente de $x - ct$. De esta manera,

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

$$\phi = \mathrm{Re}\left\{A \exp\left[-i\omega\left(t - x/c\right)\right]\right\}. \tag{11.16}$$

Si escribimos $A = ae^{i\alpha}$ entonces la ec.(11.16) toma la forma que ya antes conocías:

$$\phi = a\cos\left(\omega x/c - \omega t + \alpha\right). \tag{11.17}$$

La cantidad $k \equiv \omega/c$ se denomina *número de onda*. También se denomina *longitud de onda* λ a la cantidad $2\pi/k$. La cantidad a es la *amplitud de la onda*. El argumento del coseno es la *fase* de la onda.

En términos generales, cuando la onda viaja en cualquier dirección $\mathbf{r}$ se dice que una onda monocromática está dada por:

$$\phi = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \tag{11.18}$$

donde solamente se toma la parte real de la ec.(11.18), pero por comodidad, no lo escribimos ya mas. El vector $\mathbf{k}$ es el *vector de onda* y apunta en la dirección de propagación de la onda. Su magnitud k es el número de onda. Una onda de varios "colores" se compone de la superposición de varias ondas monocromáticas.

Sustituyendo la ec.(11.18) en la ecuación de onda, se obtiene que $k^2c^2 = \omega^2$, o bien

$$kc = \omega, \tag{11.19}$$

que es la *relación de dispersión* para una onda plana.

Tarea 5

Efecto Doppler *(fig.(4)). Considera un fluido que se mueve de manera homogénea con velocidad* $\mathbf{u}$ *con respecto a un sistema de coordenadas* K *fijo. Sobre el fluido, tomemos un sistema de coordenadas* K′*, es decir, el sistema de coordenadas* K′ *se mueve con respecto a* K *a una velocidad constante* $\mathbf{u}$.

(I) *Si los orígenes de los sistemas* K *y* K′ *coinciden al tiempo* $t = 0$ *muestra que el vector posición* $\mathbf{r}$ *medido en el sistema* K *y el vector posición* $\mathbf{r}'$ *medido en el sistema* K′ *están relacionados uno al otro mediante la relación* $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t$.

(II) *Sobre el sistema* K′*, donde el fluido está en reposo, una onda monocromática está dada por la ec.*(11.18) *para para el vector* $\mathbf{r}'$*. Muestra que la frecuencia (relación de dispersión) de esta onda en el sistema* K *está dada por:*

$$\omega = ck - \mathbf{u}\cdot\mathbf{k}. \tag{11.20}$$

(III) *Considera ahora una fuente la cual emite una onda monocromática y que se mueve con velocidad*

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

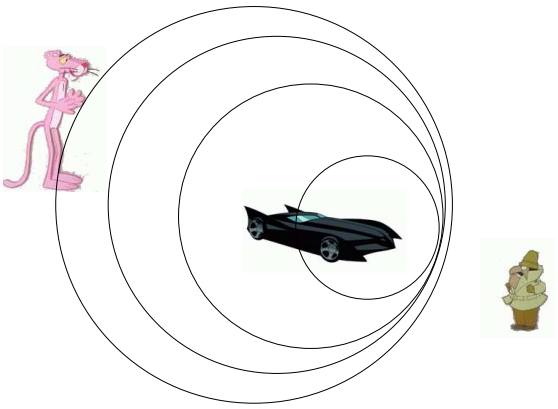

Figura 4: El efecto Doppler consiste (ver texto) en que la frecuencia de las ondas de una fuente en movimiento (como el batimobil) difieren para distintos observadores en movimiento y en reposo común. El inspector escucha tonos mas agudos (azules), de mayor frecuencia. La pantera rosa escucha tonos mas graves (colores), de menor frecuencia. Esto se debe a que la frecuencia con la que las crestas llegan al inspector aumenta debido al movimiento del batimobil. Lo opuesto ocurre para la pantera rosa.

$\mathbf{u}$ *con respecto a un medio en reposo. Toma el sistema* K' *sobre la fuente en movimiento. Así, con respecto al sistema* K' *el fluido se mueve con velocidad* $-\mathbf{u}$*. En este sistema, la frecuencia de la onda está dada por* ω_0 *y corresponde a las oscilaciones producidas por la fuente. Muestra que la frecuencia* ω *en el sistema* K *está relacionada con la frecuencia* ω_0 *del sistema* K' *mediaante la siguiente relación:*

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - (u/c)\cos\theta}, \tag{11.21}$$

donde θ *es el ángulo formado por el vector de onda* $\mathbf{k}$ *y la velocidad* $\mathbf{u}$*.*

(IV) *Muestra que si la fuente se aleja del observador, entonces el ángulo* θ *es tal que* $\pi/2 < \theta \leq \pi$ *y por lo tanto la frecuencia recibida es menor que la frecuencia emitida, es decir, los tonos son mas graves (corrimiento al rojo).*

(V) *Muestra que si la fuente se acerca al observador, entonces el ángulo* θ *es tal que* $0 \leq \theta < \pi/2$ *y por lo tanto la frecuencia recibida es menor que la frecuencia emitida, es decir, los tonos son mas agudos (corrimiento al azul).*

(VI) *Muestra que cuando* $u\cos\theta > c$ *entonces la frecuencia* ω *se vuelve negativa. Esto significa que el sonido escuchado llega en "reversa". El sonido producido por la fuente a un determinado instante llega antes que el sonido emitido en instantes previos.*

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

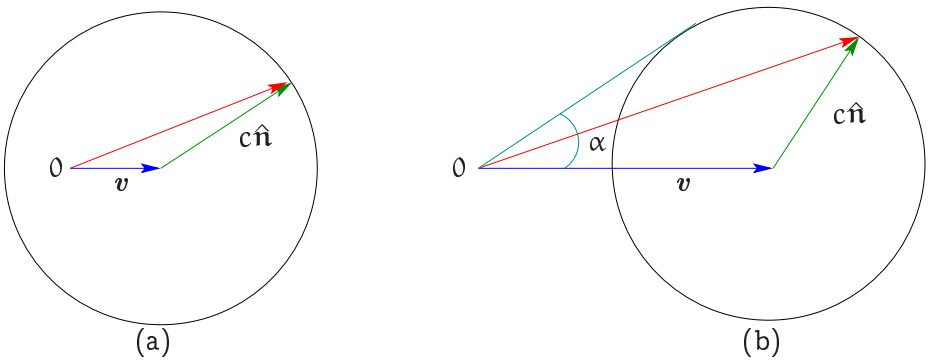

Figura 5: La figura muestra la región de comunicación dada una perturbación en el punto 0 en un fluido que se mueve uniformemente con velocidad $\boldsymbol{v}$. En el caso (a), cuando la velocidad del fluido es menor a la velocidad del sonido c la perturbación es transmitida a todo el fluido. En el caso (b) la perturbación es comunicada únicamente aguas abajo en un cono de apertura 2α. El vector $\hat{\mathbf{n}}$ es unitario y apunta en la dirección de propagación de la perturbación en el sistema de referencia del fluido.

§12. Flujos supersónicos

Ahora que ya sabemos lo que son las ondas sonoras producidas gracias a perturbaciones en el fluido, analicemos las diferencias entre flujos subsónicos (a velocidades menores que las del sonido) y flujos supersónicos (a velocidades mayores que las del sonido). A pesar de que hasta ahora hemos considerado que la velocidad del sonido es una constante a lo largo de todo el fluido, en términos generales no lo es. Esta velocidad varía de punto a punto del fluido y evoluciona como función del tiempo. De esta manera, uno suele referirse en ocasiones a la *velocidad local del sonido* para ser mas precisos.

Consideremos que en el punto 0 del espacio se hace una perturbación. Como ya sabemos está perturbación se desplaza en forma uniforme (esférica) a lo largo de todo el fluido con velocidad c, la velocidad del sonido. Si ahora realizamos la misma perturbación, pero sobre un fluido que se mueve de manera uniforme con velocidad $\boldsymbol{v}$, entonces la situación es como la que se muestra en el la fig.(5). La perturbación se mueve con el fluido a una velocidad $\boldsymbol{v} + c\hat{\mathbf{n}}$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector en la dirección de propagación del sonido con respecto al fluido.

Si la velocidad del fluido es menor a la velocidad local del sonido (flujo subsónico) entonces la perturbación se propaga a lo largo de todo el fluido, como lo muestra el caso (a) de la fig.(5). El caso supersónico difiere grandemente de los anteriores. Aquí la perturbación no es capaz de transmitirse a todo el fluido. Únicamente se transmite "*aguas abajo*" en dirección de la corriente como lo muestra el caso (b) de la fig.(5). Como el flujo es uniforme, la perturbación se propaga únicamente aguas abajo dentro de un cono de apertura 2α. La superficie frontera de este caso se denomina *superficie de Mach* o *característica* y al ángulo α, el ángulo que hace la superficie de Mach con el vector velocidad en el punto 0, se le denomina el ángulo de Mach.

En el caso de flujo no uniforme lo único que puede afirmarse es que las superficies características intersectan al vector velocidad haciendo un ángulo igual al ángulo de Mach en un punto dado del fluido.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

De la fig.(5) se sigue que

$$\sin\alpha = \frac{c}{v} \equiv \frac{1}{M}, \tag{12.1}$$

donde el número M se denomina frecuentemente como el *número de Mach* y es una de las cantidades mas importantes en el estudio de la dinámica de gases[†]. Cuando $M \to 1$ el flujo se convierte en *transónico* (ie flujo que viaja a la velocidad del sonido). A medida que $M < 1$ el flujo es subsónico y $M > 1$ cuando el flujo es supersónico. El número de Mach tiende a infinito cuando la velocidad del fluido alcanza su valor máximo que corresponde a un valor de infinito.

Cabe hacer notar que todo lo dicho anteriormente con respecto a la propagación de perturbaciones en un fluido no se aplica a perturbaciones con respecto a la vorticidad y a la entropía. Utilizando la conservación de la entropía para un fluido ideal, resulta que las perturbaciones de entropía y vorticidad no se mueven con respecto al gas, estas se mueven con el gas mismo. Esto es una consecuencia de la ley de conservación de la entropía (la entropía permanece constante a medida que el fluido se mueve) y la ley de conservación de la circulación (la vorticidad permanece constante a medida que el fluido se mueve). En otras palabras, las "características" producidas al perturbar la entropía y/o la vorticidad del fluido coinciden con las líneas de corriente.

Consideremos ahora el movimiento de un flujo adiabático y estacionario sobre el cual la aceleración gravitatoria es nula ($\mathbf{g} = 0$). Escogiendo un sistema de referencia adecuado es posible decir que la velocidad del fluido es cero en al menos un punto del fluido. Así, la ecuación de Bernoulli puede escribirse como:

$$v^2/2 + \omega = \omega_0, \tag{12.2}$$

donde ω_0 representa a la entalpía evaluada en el punto donde la velocidad se anula. Esta última relación implica que la velocidad toma el valor máximo cuando la entalpía alcanza un mínimo. En el caso de flujo adiabático, la primera ley de la termodinámica, ec.(7.7) implica que $d\omega = dp/\rho$. Como la densidad de masa es una cantidad positiva, entonces las diferenciales $d\omega$ y dp tienen el mismo signo, es decir, varían de la misma manera. De aquí que la presión se incrementa cuando la velocidad disminuye y viceversa.

El valor mínimo de la entalpía sucede cuando la temperatura alcanza el valor de cero absoluto. Esto corresponde a una presión igual a cero y a un valor de $\omega = 0$. De esta manera, es posible calcular el valor máximo de la velocidad v_{max} utilizando la ec.(12.2):

$$v_{max} = \sqrt{2\omega_0}, \tag{12.3}$$

que corresponde al valor de la velocidad de un gas al fluir de manera estacionaria y adiabática sobre un vacío.

[†]Generalmente los fluidos que viajan a grandes velocidades, por ejemplo los supersónicos, son gases. Es por esto que el estudio de la mecánica de fluidos a altas velocidades se denomina dinámica de gases

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

Calculemos la variación de la densidad de flujo de masa $j = \rho v$ a lo largo de una línea de corriente en un flujo adiabático y estacionario. Utilizando la ecuación de Euler se obtiene que $v_k \partial v_l / \partial x_k = -(1/\rho)\partial p/\partial x_l$. Multiplicando por el vector tangente a la línea de corriente dx_l esta relación se obtiene que sobre una línea de corriente $v dv = -dp/\rho$. Debido a que para flujo adiabático $dp = c^2 dp$ según la definición de velocidad del sonido, entonces se sigue que:

$$\frac{d\rho}{dv} = -\rho v / c^2. \tag{12.4}$$

Debido a que $d(\rho v) = \rho dv + v d\rho$ la ec.(12.4) se puede escribir como:

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{12.5}$$

De la ec.(12.5) se sigue que a medida que la velocidad se incremente a lo largo de una línea de corriente el flujo de masa se incrementa siempre y cuando el flujo permanezca subsónico. Cuando el fluido es supersónico, el flujo de masa disminuye. Esto significa que con el incremento de la velocidad, las líneas de corriente tienden a "juntarse" (converger) en la dirección de movimiento, siempre y cuando el flujo permanezca subsónico. En el caso supersónico las líneas de corriente tienden a "separarse" (diverger). De la ec.(12.5) se sigue que el flujo de masa ρv alcanza su valor máximo $j_\star$ cuando la velocidad del gas es igual a la velocidad local del sonido:

$$j_\star = \rho_\star c_\star, \tag{12.6}$$

donde las cantidades con asterisco se refieren a las cantidades evaluadas en el punto donde el flujo de masa alcanza su valor máximo.

Tarea 6

Así como existe el gas ideal, en diversas aplicaciones de la física se habla de una clase de gases con un comportamiento particular en el modo en que cambian sus cantidades termodinámicas bajo procesos cuasi–estáticos. Estos gases se denominan politrópicos. *Se dice que un cambio politrópico en las variables termodinámicas de un gas ocurre si dicho cambio se realiza de manera cuasi–estática y es tal que su calor específico permanece constante durante todo el proceso. A partir de esto puede mostrarse (revisa por ejemplo el libro de Chandrasekhar, 1958) que la presión y la densidad de dicho gas están relacionadas mediante:*

$$p \propto \rho^\kappa, \tag{12.7}$$

donde κ *es el* índice politrópico *y es una constante. Como ya sabemos, en el caso de un gas ideal su valor es igual a* $\kappa = 5/3$ *para un gas monoatómico. De hecho en este caso* $\kappa = c_V/c_p$*, el cociente entre*

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

los calores específicos a volumen y presión constante. En el caso de un gas isotérmico la ecuación de estado de un gas ideal implica que $p \propto \rho$*, es decir el índice politrópico tiene un valor igual a la unidad.*

Una onda de choque *es una discontinuidad (en el sentido matemático) de las cantidades hidrodinámicas a través de una superficie. Existen ciertas condiciones que debe cumplir una onda de choque. Por ejemplo, si consideramos que la superficie de discontinuidad es plana (siempre puede hacerse esto, tomando un pedazo suficientemente pequeño de esta superficie) y paralela al plano* $0yz$ *y que la velocidad del flujo es hacia la dirección* x *positiva, entonces desde el sistema de referencia de la superficie de discontinuidad (ie tomemos la velocidad de la superficie de discontinuidad igual a cero) los flujos de masa, energía y momento deben conservarse a través de esta superficie*[†]*:*

$$[\rho v] = 0, \tag{12.8}$$

$$\left[\frac{1}{2}v^2 + \omega\right] = 0, \tag{12.9}$$

$$\left[p + \rho v^2\right] = 0. \tag{12.10}$$

Donde $[a] \equiv a_2 - a_1$ *para cualquier cantidad y los subíndices* 1 *y* 2 *se refieren a los valores de las cantidades hidrodinámicas antes de cruzar la superficie de discontinuidad (la onda de choque) y después de cruzar la onda de choque respectivamente. Formalmente una onda de choque cumple con la condición de que:*

$$p_2 > p_1, \ y \qquad V_1 < V_2, \tag{12.11}$$

donde $V \equiv 1/\rho$ *es el volumen por unidad de masa.*

(I) *Muestra que la diferencia de velocidades está dada por:*

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)\,(V_1 - V_2)}, \tag{12.12}$$

y que

$$\omega_1 - \omega_2 + \frac{1}{2}\,(V_1 + V_2)\,(p_2 - p_1) = 0, \tag{12.13}$$

Esta última relación determina la relación entre p_2 *y* V_2 *dados* p_1 *y* p_2*. Se denomina la* adiabática de Hugoniot *o simplemente la* adiabática de choque.

(II) *Muestra que para un gas politrópico, la entalpía y la velocidad del sonido están dados respectivamente por:*

$$\omega = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p\, V, \qquad c^2 = \kappa p\, V. \tag{12.14}$$

[†]Esto es fácil de mostrar si se considera una pequeña superficie que atraviesa la superficie de discontinuidad. Sobre el volumen de esta superficie se integran las ecuaciones de conservación de masa, conservación de energía y conservación de momento para encontrar que los flujos de estas cantidades no deben variar a través de las superficies de discontinuidad

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

(III) *Muestra que en el caso de un gas politrópico, la adiabática de Hugoniot puede escribirse como:*

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\kappa+1)p_2 + (\kappa-1)p_1}{(\kappa-1)p_2 + (\kappa+1)p_1}, \tag{12.15}$$

y que la diferencia de velocidades de la ec.(12.12) *está dada por:*

$$v_1 - v_2 = \frac{(p_2 - p_1)\sqrt{2V_1}}{\sqrt{(\kappa-1)p_1 + (\kappa+1)p_2}}. \tag{12.16}$$

(IV) *Con todo lo anterior muestra que:*

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\kappa+1)M_1^2}{(\kappa-1)M_1^2 + 2}, \tag{12.17}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa M_1^2}{(\kappa+1)} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \tag{12.18}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left\{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)\right\}\left\{(\kappa-1)M_1^2 + 2\right\}}{(\kappa+1)^2 M_1}, \tag{12.19}$$

donde M_1 *es el número de Mach evaluado en el lado* 1.

(V) *Finalmente muestra que para un choque fuerte, es decir cuando* $M_1 \gg 1$ *entonces* V_2/V_1 *tiende a una cantidad finita y que* $T_2/T_1 \propto p_2/p_1$*, es decir la temperatura se incrementa tanto como uno quiera al cruzar el choque. Calcula los valores a los que estas cantidades tienden en el límite.*

§13. Cosmología Newtoniana

La aplicación mas sencilla que existe utilizando hidrodinámica no–relativista en Astrofísica es hacia el universo mismo. Todo consiste en imaginar al universo como constituido por partículas de fluido que representan las galaxias: "el fluido universal". Distintas observaciones muestran que el universo a larga escala es homogéneo (se ve igual en cualquier larga escala) e isotrópico (no varía según la dirección que se tome). Esto únicamente sucede a grandes escalas pues existe un grado alto de anisotropía e inhomogeneidad en escalas cortas.

Consideremos un origen de coordenadas O amarrado a nuestra galaxia. Otra galaxia con origen de coordenadas O' se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}(\mathbf{r})$ con respecto a nuestra galaxia y $\mathbf{r}$ es el radiovector medido con respecto a O. La galaxia en O' se localiza en $\mathbf{r} = \mathbf{a}$. De esta manera, la galaxia con origen O' se mueve con el fluido universal con respecto a O. Si un observador en O' observa una galaxia en la posición $\mathbf{r}'$ y mide la velocidad de esta misma como $\boldsymbol{v}'(\mathbf{r}') = \boldsymbol{v}'(\mathbf{r} - \mathbf{a})$, entonces de acuerdo a la ley de adiciones de velocidades de Galileo

$$\boldsymbol{v}'(\mathbf{r}') = \boldsymbol{v}'(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \boldsymbol{v}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{v}(\mathbf{a}). \tag{13.1}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

Debido a la homogeneidad e isotropía del universo, la densidad de masa ρ y la presión p son tales que:

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{r}') &= \rho'(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = \rho(\mathbf{r}), \\ p'(\mathbf{r}') &= p'(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = p(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{13.2}$$

Sin embargo, el *principio cosmológico* dice que *no vivimos en un lugar privilegiado*. En otras palabras, las ecs.(13.1)-(13.2) son validas para cualquier origen O que se tome en el universo. De esta manera, la ec.(13.1) significa que la velocidad debe ser necesariamente una función lineal del radiovector, es decir, $\boldsymbol{v}(\mathbf{r}) = \xi(t)\mathbf{r} + \text{const}$. Debido a que $\boldsymbol{v}(\mathbf{r}=0) = 0$, la constante en esta ecuación debe ser cero. Al hecho de que la velocidad sea proporcional a la distancia se le denomina *ley de Hubble*. Por comodidad, introduzcamos un sistema de coordenadas amarrado a las galaxias. Estas *coordenadas de comovimiento* están definidas por

$$\mathbf{r} = R(t)\mathbf{r}_0, \tag{13.3}$$

donde $R(t)$ es el *factor de expansión* que está normalizado a una determinada época de tal forma que $R(t_0) = 1$ con $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$. Así, la ley de Hubble, ec.(13.1), es tal que:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\dot{R}}{R}\mathbf{r} = f(t)\mathbf{r} \qquad \left(\dot{[\,]} \equiv d[\,]/dt\right). \tag{13.4}$$

Dado a que no hay creación espontánea de materia en el universo, entonces la ecuación de continuidad ec.(4.5) es válida. Esta ecuación con ayuda de la ley de Hubble y el hecho de que la densidad $\rho(t)$ solo es función del tiempo t se sigue que $\dot{\rho}/\rho = -3\dot{R}/R$ y por lo tanto

$$\rho R^{-3} = \rho(t_0). \tag{13.5}$$

Sustituyendo la ley de Hubble ec.(13.4) en la ecuación de Euler ec.(5.8) se obtiene

$$3(\dot{f} + f^2) = -\mathbf{grad}^2\phi = -4\pi G\rho, \tag{13.6}$$

donde G es la constante de gravitación universal y la igualdad del lado derecho de la ecuación se obtiene gracias a la ecuación de Poisson para el campo gravitacional. De aquí se sigue que el "campo gravitacional del universo" está dado por:

$$\mathbf{g} = -\frac{4}{3}\pi G\rho\mathbf{r}. \tag{13.7}$$

Sustituyendo el valor de f en la ec.(13.6) y utilizando la ec.(13.5) se obtiene la "*ecuación de movimiento del universo*":

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

$$\ddot{R}R^2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho(t_0) = -C \tag{13.8}$$

donde C es una constante positiva. Debido a que $d/dt = \dot{R}d/dR$, la ec.(13.8) puede reescribirse como:

$$\dot{R}d\dot{R} = -CR^{-2}dR. \tag{13.9}$$

Integrando esta relación se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{C}{R} = -\frac{1}{2}\kappa. \tag{13.10}$$

El primer término del lado izquierdo en esta ecuación es la energía cinética del universo en expansión. El segundo término puede verse como "la energía potenciál del universo" y el término de la derecha es entonces la energía total del sistema. Utilizando un modelo cosmológico relativista puede mostrarse que la constante κ representa la *curvatura del universo*. Para analizar la dinámica del universo en expansión estudiemos los siguientes casos:

- *Curvatura negativa.* ➜ Hagamos el cambio $\kappa \to -\kappa$. De esta manera la energía total del universo es positiva y en el límite cuando $R \to \infty$, es decir cuando $t \to \infty$, se obtiene de la ec.(13.10) que $R = \sqrt{k}t$, es decir, el universo está *abierto* y se expande por siempre.
- *Cero curvatura.* ➜ La solución de la ec.(13.10) con $\kappa = 0$ es $R = (9C/2)^{1/3}t^{2/3}$ cuando $t \to \infty$
- *Curvatura positiva.* ➜ Para este caso la energía total del universo es negativa y $R \to 0$ cuando $t \to t_\star$ para un cierto tiempo finito $t_\star$ (ver tarea 7). En otras palabras, el universo se recolapsa después de un determinado tiempo $t_\star$.

Tarea 7

(I) *Integra la ecuación de movimiento del universo, ec.*(13.10)*, por completo para los casos en los que (a) la curvatura es negativa, (b) la curvatura es cero y (c) la curvatura es positiva. Muestra que en el último caso el universo se recolapsa después de un tiempo finito pasada la "gran explosión". ¿Cuál es el valor de este tiempo?*

(II) *Dibuja un diagrama de* R *vs* t *en donde esquemáticamente muestres que sucede para cada uno de los casos del inciso anterior.*

§14. Análisis dimensional

En el curso de mecánica se estudió en detalle las unidades que se consideran fundamentales en la física. A lo largo de tu vida habrás notado que existen diversas unidades utilizadas para describir el

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

universo que nos rodea. Por ejemplo, en el caso de longitud hablamos de metros, centímetros, kilómetros, yardas, millas, pies, años luz, parsecs, etc.

El objetivo de una medición es *comparar*. Lo que uno hace es comparar un objeto con otro para así describir alguna propiedad física del mismo. De nada sirve decir: "Juanito está alto" (esto solo tiene sentido pues en nuestras mentes está mas o menos claro que una altura promedio de un humano es de alrededor de 1.70 m). La frase debe decirse algo así como "Juanito está mucho mas alto que Pedrito". Igualmente, es difícil entender que las distancias nucleares son pequeñas o que las distancias astronómicas son enormes si no se compara con algo. Es por esto que se eligió una barra llamada metro la cual se encuentra en un museo de París. Haciendo copias del mismo uno puede comparar cualquier distancia con esta barra fundamental.

El concepto de medir es bien conocido por todos nosotros. Esto es una de las cualidades humanas mas impresionantes. No obstante, el uso de las unidades varía de lugar en lugar. Una persona curiosa que calza zapatos del número 29 en México se habrá dado cuenta que ese número se refiere precisamente a 29 cm. En el caso de zapatos para hombre, este mismo número corresponde aproximadamente al número 9 en el Reino Unido, al número 43 en el continente Europeo, al número 9.5 en los Estados Unidos de América y al número 27.5 en Japón. El significado de estos números no es claro. De hecho no conozco a nadie que lo sepa. Solamente se habla de número de calzado y ya. Este mismo ejemplo sucede para cualquier tipo de unidades que existe. Es un verdadero caos. Esta ha sido la razón por la cual se ha procurado que exista un Sistema Internacional (SI) de Unidades. Aunque el éxito del SI es notorio, aún se siguen utilizando unidades distintas a las del SI y sus derivados en diversos lugares del mundo.

Lo importante es notar que existe algo mas profundo que el concepto de unidad. De hecho, se denomina una *dimensión* a una cantidad física de la naturaleza. Las dimensiones mas comunes son el tiempo t, la longitud l y la masa m. Cabe hacer notar que cuando hablamos de dimensión no nos referimos a unidades. Por ejemplo, la dimensión de longitud NO significa centímetros, ni metros, ni millas, etc, pero la dimensión de longitud se mide en centímetros, metros, millas, etc.

Dicho de otra forma, decimos que una cantidad *dimensional* es aquella para la cual su valor depende de una escala aceptada. Análogamente, se dice que una cantidad *adimensional* es una cantidad para la cual su valor no depende de una escala aceptada. En términos generales, se dice que la longitud l, el tiempo t, la masa m, la temperatura T, la carga q y otras mas son cantidades dimensionales, pero el cociente de dos longitudes, dos tiempos, dos masas, dos temperaturas, dos cargas, etc es claramente una cantidad adimensional.

La cantidad adimensional mas famosa que existe es el ángulo. Sobre un circulo de radio r, se dice que un pedazo de circunferencia l está dado por la relación $l = \alpha r$. Esta relación define al ángulo $\alpha = l/r$, una cantidad adimensional.

La longitud misma puede escogerse de manera adimensional. En efecto, si tomamos a la longitud L como longitud "base", entonces cualquier otra longitud, digamos K puede medirse con respecto a la primera. De esta forma podemos decir que la segunda longitud está dada por la cantidad K/L. De esta

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

manera pueden anularse las dimensiones de longitud. La experiencia muestra que esto no es conveniente de ninguna manera.

La razón por la cual los ángulos se definen de manera adimensional y las longitudes no, viene de la geometría. Consideremos dos triángulos semejantes. Los lados de uno de los triángulos son mas grandes que el del otro triángulo. Uno de sus ángulos es α. En este caso, los ángulos son los mismos incluso cuando las longitudes de los lados son distintas. Razón mas que suficiente para decir que las longitudes deben ser dimensionales y los ángulos adimensionales.

Así pues, la experiencia nos provee con diversas dimensiones que nosotros consideramos esenciales. Siempre buscamos dimensiones sencillas de analizar. Por ejemplo, si decimos que nuestras dimensiones son $l,\ m,\ t$ (que son las dimensiones que aparecen siempre en un problema de mecánica) entonces las dimensiones de velocidad son iguales a dimensiones de distancia entre tiempo. La manera matemática para escribir esto es mediante el uso de corchetes cuadrados:

$$[v] = lt^{-1}. \tag{14.1}$$

Utilizando esta notación, se dice que una cantidad p es adimensional cuando $[p] = 1$. En lugar de estas dimensiones "fundamentales" podríamos haber escogido a la longitud, la masa y la velocidad como fundamentales. De esta manera, las dimensiones de tiempo serían iguales a las dimensiones de longitud entre las dimensiones de velocidad.

El escoger las dimensiones "fundamentales" apropiadas viene de la experiencia misma. Estamos ya tan acostumbrados a que la longitud, el tiempo y la masa son dimensiones fundamentales que no pensamos nunca mas en que pueden no serlo. Lo que sucede es que de alguna manera, los humanos seleccionamos las que consideramos mas sencillas, pero está claro que no tienen nada de fundamentales.

En el estudio de la ley de Newton en mecánica se vio que justamente esta ley define el concepto de *masa inercial* m de un objeto. La ley de Newton está dada por $F = ma$, donde F es la fuerza que actúa sobre un objeto de masa m y a es la aceleración producida por esta fuerza. Lo que Newton encontró es que $F \propto a$. Lo brillante de su trabajo fue el descubrir que la constante de proporcionalidad era una propiedad innata al cuerpo: su masa. Lo mismo sucede para el caso de otras leyes de la naturaleza. Newton pudo haber puesto la ley como $F = cma$, donde c es una constante de proporcionalidad. Si las dimensiones de la fuerza F son tales que $[F] = f$, entonces $[c] = ft^{-2}m^{-1}l^{-1}$. Hemos entonces definido una nueva dimensión, la dimensión de fuerza f. Así, podríamos subir en el número de dimensiones fundamentales tanto como sea posible. La experiencia y comodidad nos indican que esto no es útil. De hecho, en la ley de Newton se supone que $c \equiv 1$.

Veamos ahora que también es posible utilizar menos dimensiones de las "fundamentales". Por ejemplo, la ley de Newton de gravitación universal es $F = Gm_1m_2/r^2$, donde G es la constante universal de gravitación. Si tomamos $[G] = 1$ (es decir G es adimensional) y por comodidad suponemos que $G = 1$, esto implica redefinir a las masas. En efecto, como $[G] = [\text{ masa }]^{-1}[\text{ longitud }]^3[\text{ tiempo }]^{-2}$ se

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

obtiene que necesariamente $[\text{ masa }] = m = l^3 t^{-2}$. De esta manera, la masa ya no es una dimensión independiente o fundamental. Esta es proporcional al cubo de la dimensión de longitud y es inversamente proporcional al cuadrado de la dimensión del tiempo. Si ahora a la velocidad de la luz la hacemos adimensional y tomamos su valor idénticamente igual a uno, se obtiene que $[\text{ longitud }] = [\text{ tiempo }]$. Así, la masa y el tiempo son dimensiones que ahora dependen de la longitud solamente. En otras palabras, podemos deshacernos de todas las dimensiones y suponer que todas las demás cantidades son adimensionales (dependen solamente de la longitud). Así es posible describir un problema físico a la manera "matemática", sin dimensiones.

De esta manera podemos subir o bajar el número de dimensiones tanto como queramos. El número de dimensiones convencionales es completamente arbitrario. Lo que sucede es que las dimensiones de tiempo, masa y longitud son suficientes para describir los fenómenos físicos de la mecánica, pero ciertamente no es una condición necesaria.

En ciertas aplicaciones de la física resulta importante tener un único sistema de unidades. Uno de los mas comunes es el que utilizan los cosmólogos. En este sistema de unidades se escoge a las constantes fundamentales como la constante de Planck $\hbar$, la velocidad de la luz en el vacío c y la constante de Boltzman para los gases k_B de la siguiente manera:

$$\hbar = c = k_B = 1, \qquad [\hbar] = [c] = [k_B] = 1. \tag{14.2}$$

Las dimensiones de estas cantidades están dadas por:

$$\begin{aligned} [\hbar] &= [\text{ energía }][\text{ tiempo }], \\ [c] &= [\text{ longitud }][\text{ tiempo }]^{-1}, \\ [k_B] &= [\text{ energía }][\text{ temperatura }]^{-1}. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Sustituyendo la ec.(14.3) en la ec.(14.2) se obtiene que

$$[\text{ energía }][\text{ tiempo }] = [\text{ longitud }][\text{ tiempo }]^{-1} = [\text{ energía }][\text{ temperatura }]^{-1} = 1. \tag{14.4}$$

Como la masa y la energía están relacionadas mediante la famosa relación $E = mc^2$ entonces con ayuda de la ec.(14.4) se obtiene que $[\text{ energía }] = [\text{ masa }]\cancel{[\text{ longitud }]^2}\cancel{[\text{ tiempo }]^{-2}} = [\text{ masa }]$. Con esto y la ec.(14.4) se obtiene que:

$$[\text{ Energía }] = [\text{ Masa }] = [\text{ Temperatura }] = [\text{ Longitud }]^{-1} = [\text{ Tiempo }]^{-1}. \tag{14.5}$$

Cuando se escoge este sistema de unidades, con una sola dimensión, la dimensión de energía, suele

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

Unidad	Valor (GeV)	Valor Convencional
Energía	1	1.6×10^{-3} erg
Temperatura	1	1.16×10^{13} K
Masa	1	1.78×10^{-24} gm
Longitud	1	1.97×10^{-14} cm
Tiempo	1	6.58×10^{-25} s

Tabla 1: La tabla muestra la equivalencia de una unidad de energía para distintas unidades en el sistema único de unidades utilizado en cosmología. Por ejemplo, cuando se habla de que la temperatura es de 1 GeV significa que la temperatura es de 1.16×10^{13} K en el sistema internacional.

medirse todo en Giga–electrón–volts, que son unidades de energía (GeV). La tabla 1 muestra las equivalencias para estas unidades.

Supongamos ahora que una cantidad a tiene dimensiones dadas por

$$[a] = l^{k_1} m^{k_2} t^{k_3}, \tag{14.6}$$

donde los k_i's son números enteros no negativos. En el caso de realizar un reescalamiento de unidades, las unidades primadas, tales que

$$l' = \alpha l, \quad m' = \beta m, \quad t' = \gamma t, \tag{14.7}$$

es claro que la relación entre la cantidad a' en el nuevo sistema de unidades y la cantidad a en el sistema no primado está dada por:

$$a' = \alpha^{k_1} \beta^{k_2} \gamma^{k_3} a. \tag{14.8}$$

Existen argumentos muy generales para demostrar la relación de la ec.(14.8), pero todos hemos hecho un cambio de unidades. Por ejemplo, supongamos que $a = 3\,\mathrm{kg^2 m/s}$. Pero $1\,\mathrm{lb} = 0.454\,\mathrm{kg}$, $1\,\mathrm{yd} = 0.914\,\mathrm{m}$ y $1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$. Por lo tanto, la cantidad a medida en yardas, libras y minutos, está dada por $a = 3 \times (0.454)^{-2}\,\mathrm{lb}^2 \times (0.914)^{-1}\,\mathrm{yd} \times (60)\,\mathrm{min}^{-1} = \left[(0.454)^{-2}(0.914)^{-1}(60)\right] a'$, donde $a' \equiv 3\,\mathrm{lb}^2\,\mathrm{yd}\,\mathrm{min}^{-1}$. Así se obtiene que $a' = (0.454)^2(0.914)(60)^{-1}\,a$, en completa analogía con la ec.(14.8).

A pesar de que una cantidad física varíe de acuerdo al sistema de unidades utilizado, la relación funcional entre sus dimensiones se mantiene invariante. En otras palabras, las leyes físicas no dependen en la elección de unidades. Estas leyes son relaciones funcionales muy generales entre distintas cantidades. Por ejemplo, la ley de Hooke para los resortes tiene la misma forma sin importar el sistema de unidades que se utilice para su medición.

A manera de ejemplificar el poder del análisis dimensional consideremos un gas caracterizado por la temperatura T, la densidad ρ y una constante física, digamos el calor específico a volumen constante c_V. Este calor específico es la cantidad de calor que gana para subir la temperatura en una unidad, es

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

decir: $c_V = (\partial\epsilon/\partial T)_V = T(\partial s/\partial T)_V$ de acuerdo a la primera ley de la termodinámica. Si tomamos a la la longitud, el tiempo y la masa como dimensiones independientes, entonces:

$$[T] = \Theta, \quad [\rho] = Ml^{-3}, \quad [c_V] = [\text{ energía }]m^{-1}\Theta^{-1} = l^2\Theta^{-1}t^{-2}. \tag{14.9}$$

La ecuación de estado del gas es tal que:

$$p = p(T, \rho, c_V). \tag{14.10}$$

Nuestro problema está caracterizado por tres dimensiones independientes (masa, tiempo y longitud) y cuatro parámetros fundamentales (temperatura, calor específico, densidad y presión). En lugar del tiempo, la masa y la longitud podemos escoger otras tres dimensiones representativas, por ejemplo la temperatura la densidad y el calor específico. Si denotamos a las dimensiones de estas cantidades por:

$$[T] = \Theta, \quad [\rho] = R, \quad \text{y} \quad [c_V] = \zeta, \tag{14.11}$$

entonces las dimensiones de presión están dadas por:

$$[p] = [\text{ Fuerza }]/[\text{ Área }] = mt^{-2}l^{-1} = \Theta^{k_1}R^{k_2}\zeta^{k_3} = \Theta R\zeta. \tag{14.12}$$

Hagamos ahora un cambio de unidades de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T \to T' = \alpha_1 T \equiv 1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_1 = 1/T, \\ \rho \to \rho' = \alpha_2 \rho \equiv 1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_2 = 1/\rho, \\ c_V \to c_V' = \alpha_3 c_V \equiv 1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_3 = 1/c_V. \end{aligned} \tag{14.13}$$

De esta manera y siguiendo la propiedad mencionada en la ec.(14.8) se obtiene que:

$$p' = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 p = p/T\rho c_v. \tag{14.14}$$

Pero debido a que la ecuación de estado del gas, ec.(14.10), es una ley física, su forma no varía al hacer un reescalamiento de unidades. De esta manera, en las nuevas unidades primadas, se obtiene que $p' = p'(T', \rho', c_V') = p'(1,1,1)$, es decir, $p' =$ const. Entonces la ec.(14.14) implica que:

$$p \propto T\rho c_V, \tag{14.15}$$

que se conoce como la ecuación de Clapeyron (ecuación del gas ideal). La constante de proporcionalidad se encuentra por medio del experimento o por medio de una teoría física del comportamiento cinético de las moléculas del gas. Lo que se encuentra es que esta constante de proporcionalidad está dada por

Copyleft © Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

R/μ, donde R es la constante universal de los gases y μ es el peso molecular medio.

Regresemos a la condición de equilibrio hidrostático que analizamos en la sección §6 para el caso de un enorme gas con simetría esférica (por ejemplo, una estrella, una nube interestelar, el gas de una galaxia). De la ec.(6.5) sabemos que si los gradientes de presión exceden a las fuerzas de gravitación, entonces la configuración tiende a expandirse. Inversamente, si las fuerzas de gravitación del gas son mas fuertes que los gradientes de presión entonces el gas tiende a "*colapsarse*". Este es uno de los problemas centrales de la astrofísica. Precisamente estos colapsos gravitacionales son capaces de formar la estructura del universo que nos rodea: galaxias, estrellas y agujeros negros.

Calculemos cual es el radio L que un gas de densidad uniforme debe poseer para que las fuerzas de presión y de gravitación se mantengan en equilibrio mecánico. El problema en cuestión está caracterizado por una longitud característica L, la presión del gas p, su densidad ρ y una constante fundamental, la constante de gravitación universal G. En otras palabras, el radio L de la masa gaseosa es tal que $L = L(G, \rho, p)$. El problema está caracterizado por tres dimensiones independientes (l, m y t) y cuatro cantidades importantes (L, G, ρ y p).

Tomemos ahora a las dimensiones de L, p, y ρ como independientes y denotémoslas por:

$$[L] \equiv \mathbb{L} \qquad [\rho] \equiv \mathbb{R} \qquad [p] \equiv \mathbb{P}. \tag{14.16}$$

De esta manera:

$$[G] = \mathbb{P}\mathbb{L}^{-2}\mathbb{R}^{-2}. \tag{14.17}$$

Si ahora hacemos un reescalamiento de unidades (las unidades primadas) de tal forma que:

$$\begin{aligned} L \to L' = \alpha_1 L \equiv 1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_1 = 1/L, \\ \rho \to \rho' = \alpha_2 \rho \equiv 1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_2 = 1/\rho, \\ p \to p' = \alpha_3 p \equiv 1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha_3 = 1/p. \end{aligned} \tag{14.18}$$

Utilizando el hecho de que $L' = L'(G', \rho', p')$ en el nuevo sistema de unidades combinado con los resultados de la ec.(14.18) se obtiene que:

$$L' = L'\left(G' = \frac{G}{L^{-2}p\rho^{-2}}, 1, 1\right) = \text{ const.} \tag{14.19}$$

La cantidad G' es adimensional y por lo tanto, la ec.(14.19) es tal que $G \propto p/L^2\rho^2$. Debido a que la velocidad del sonido está dada por la ec.(12.14) entonces $p \sim c^2\rho$ y por lo tanto:

$$L \sim \frac{c}{\sqrt{G\rho}}. \tag{14.20}$$

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

La longitud L representa el tamaño característico que una configuración gaseosa debe poseer para que sus fuerzas de presión y gravitacionales estén en equilibrio mecánico. Se denomina la *longitud de Jeans* en honor a su descubridor y de ahora en adelante la escribiremos como R_J. La masa que un objeto de radio R_J posee es, a orden de magnitud, $M_J \sim R_J^3 \rho$ y se denomina la *masa de Jeans*. Es claro que un objeto que posee su masa mayor a su correspondiente masa de Jeans, debe colapsarse. De esta manera, cuando $M_{objeto} > M_J$ (ie $R_{objeto} > R_J$) se obtiene un *colapso gravitacional*. Esto es lo que se conoce como el *criterio de estabilidad gravitacional de Jeans*[†].

Los ejemplos mencionados aquí con respecto al análisis dimensional son consecuencia del teorema fundamental del análisis dimensional: el *Teorema Π de Buckingham*. No enfatizaremos mas en este teorema, pero cabe hacer notar la importancia de que en algún momento de tu vida leas su demostración mas general. El libro de Sedov (1993) así como los artículos de Hulin (1980) y Duff et al. (2001) te serán de gran utilidad para esto.

Tarea 8

Considera un objeto condensado (como una estrella o un agujero negro) que se encuentra inmerso dentro de una nube de gas mucho mas grande que el objeto condensado. De esta manera, el objeto "central" puede aproximarse mediante un punto, que por comodidad pondremos en el origen de coordenadas. Supongamos que la gravedad propia del gas es despreciable en comparación con la gravedad que ejerce el objeto central sobre cualquier partícula de fluido en la nube. Por lo tanto, la dinámica de las partículas de fluido en la nube de gas está determinada por las condiciones iniciales y de frontera, así como por la fuerza gravitacional producida por el objeto central.

1. *Suponiendo que el gas en la nube ha alcanzado un estado estacionario ($\partial/\partial t = 0$) y que este mismo obedece una relación politrópica, muestra utilizando las ecuaciones de continuidad y de Euler que la velociad $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_r$, donde r es la coordenada radial, obedece la siguiente ecuación:*

$$\frac{1}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dv}{dr} = -\frac{2}{r} + \frac{GM_\star}{r^2c^2}. \tag{14.22}$$

   Aquí hemos supuesto simetría esférica (pues el flujo ha alcanzado un estado estacionario) y hemos escrito a la masa del objeto central como $M_\star$. Este tipo de flujo se denomina flujo de acreción

[†]La longitud de Jeans es la distancia que una onda de sonido recorrería ($t_s \sim R/c$) en un tiempo de colapso ($t_c \sim \left(R^3/GM\right)^{1/2} \sim 1/\sqrt{(G\rho)}$). Por si no lo sabes, el tiempo de colapso es el tiempo (a orden de magnitud) que tardaría una partícula en alcanzar el origen de un campo gravitacional desde la distancia R. Otra manera de calcular la longitud de Jeans es la siguiente. Cuando la región de longitud característica R se encuentra en equilibrio hidrostático, entonces

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\rho M(<r)}{r^2}. \tag{14.21}$$

Es decir, aproximadamente se tiene que $dp/dr \sim -p/r$ y que $M \sim \rho R^3$. Como $c^2 \sim p/\rho$ entonces $R \sim c/\sqrt{(G\rho)}$. De esta manera se ve que la longitud de Jeans es justamente la longitud necesaria para detener un colapso gravitacional, de lo contrario la igualdad de la ec.(14.21) no sería válida.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

de Bondi *en honor a su creador, Bondi (1952), y es uno de los problemas mas famosos de la astrofísica*[†].

2. *Muestra que una partícula de fluido alcanza un valor sónico en el punto*

$$r_s = \frac{GM}{2c^2}. \tag{14.23}$$

Hazlo de manera analítica con ayuda de la ec.(14.22) *y también hazlo utilizando análisis dimensional.*

3. *Define* $M = v/c$ *y* $\xi = r/r_s$. *Muestra entonces que:*

   (a) *Si* $M \gg 1$ *y* $\xi \gg 1$ *entonces* $M^2 \approx 4/\xi + const.$

   (b) *Si* $M \ll 1$ *y* $\xi \ll 1$ *entonces* $M^2 \approx const \times e^{-4/\xi}$.

   (c) *Si* $M \ll 1$ *y* $\xi \gg 1$ *entonces* $M^2 \approx 4/\xi^4$.

   (d) *Cerca del punto sónico, cuando* $M = 1 - \epsilon$ *y* $\xi = 1 - \delta$ *(*ϵ *y* δ *cantidades pequeñas) muestra que* $dM/d\xi = \pm 2$.

   (e) *Con todo esto, haz una gráfica de* M *vs* ξ *donde muestres las regiones sónicas, subsónicas y supersónicas. Muestra como varía la velocidad dentro de este diagrama.*

4. *Utilizando el teorema de Bernoulli, o de cualquier otra manera, muestra que la velocidad del sonido* $c(r_s)$ *evaluada en el punto sónico está dada por:*

$$c(r_s) = \left\{\frac{2}{5-3\kappa}\right\}^{1/2} c_\infty, \tag{14.24}$$

en donde c_∞ *es el valor de la velocidad del sonido en* $r = \infty$.

5. *La* taza de acreción $\dot{M}$ *se define como la cantidad de masa por unidad de tiempo que cae al objeto central de masa* $M_\star$. *Muestra utilizando la ecuación de continuidad o de alguna otra manera, que:*

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v = const. \tag{14.25}$$

De aquí muestra, después que hayas mostrado la igualdad $\rho^{\kappa-1}(r_s)c_\infty^2 = \rho_\infty^{\kappa-1}c^2(r_s)$, *que para el flujo de acreción de Bondi (o acreción esférica), la taza de acreción está dada por*

$$\dot{M} = \frac{\pi G M_\star^2 \rho_\infty}{c_\infty^{3/2}} \left\{\frac{2}{5-3\kappa}\right\}^{(5-3\kappa)/(2(\kappa-1))}, \tag{14.26}$$

donde ρ_∞ *es el valor de la la densidad evaluado lejos del objeto central.*

[†] Para distancias suficientemente alejadas del objeto central, la ec.(14.22) es válida incluso cuando el objeto central es un agujero negro o una estrella de neutrones. Esto porque la métrica del espacio–tiempo generada por estos objetos resulta converger a la métrica Newtoniana para radios suficientemente grandes.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

Apéndice.

GNU Free Documentation License

Version 1.1, March 2000

Copyright © 2000 Free Software Foundation, Inc.
59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA
Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other written document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

§15. Applicability and Definitions

This License applies to any manual or other work that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you".

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall

subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (For example, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, whose contents can be viewed and edited directly and straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup has been designed to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML designed for human modification. Opaque formats include PostScript, PDF, proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

§16. Verbatim Copying

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display

copies.

§17. Copying in Quantity

If you publish printed copies of the Document numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a publicly-accessible computer-network location containing a complete Transparent copy of the Document, free of added material, which the general network-using public has access to download anonymously at no charge using public-standard network protocols. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

§18. Modifications

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

- List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has less than five).
- State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- Preserve all the copyright notices of the Document.
- Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- Include an unaltered copy of this License.
- Preserve the section entitled "History", and its title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- In any section entitled "Acknowledgements" or "Dedications", preserve the section's title, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- Delete any section entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

- Do not retitle any existing section as "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties – for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

§19. Combining Documents

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections entitled "History" in the various original documents, forming one section entitled "History"; likewise combine any sections entitled "Acknowledgements", and any sections entitled "Dedications". You must delete all sections entitled "Endorsements."

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

§20. Collections of Documents

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

§21. Aggregation With Independent Works

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, does not as a whole count as a Modified Version of the Document, provided no compilation copyright is claimed for the compilation. Such a compilation is called an "aggregate", and this License does not apply to the other self-contained works thus compiled with the Document, on account of their being thus compiled, if they are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one quarter of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that surround only the Document within the aggregate. Otherwise they must appear on covers around the whole aggregate.

§22. Translation

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License provided that you also include the original English version of this License. In case of a disagreement between the translation and the original English version of this License, the original English version will prevail.

§23. Termination

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void,

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*

and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

§24. Future Revisions of This License

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have no Invariant Sections, write "with no Invariant Sections" instead of saying which ones are invariant. If you have no Front-Cover Texts, write "no Front-Cover Texts" instead of "Front-Cover Texts being LIST"; likewise for Back-Cover Texts.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

Bibliografía

Bondi, H., 1952. On spherically symmetrical accretion. *MNRAS*, **112**, 195+.

Chandrasekhar, S., 1958. *An introduction to the study of stellar structure*. Dover, 1st ed.

Duff, M., Okun, L. & Veneziano, G., 2001. Trialogue on the number of fundamental constants. URL `http://arxiv.org/physics/0110060`.

Hulin, M., 1980. Dimensional analysis: some suggestions for the modification and generalisation of its use in physics teaching. *Eur. J. Phys.*, **1**, 48–55.

Landau, L. & Lifshitz, E., 1987. *Fluid Mechanics*, vol. 6 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon, 2nd ed.

Sedov, L., 1993. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. CRC Press, 10th ed.

Copyleft © *Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>*