Gravitación Astrofísica
Examen

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>
http://www.astroscu.unam.mx/~sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Noviembre 21, 2001

Contestar SOLAMENTE DOS preguntas. En todos tus cálculos enfatiza la física y explica (¡dí no a las matemáticas sin sentido!). Puedes utilizar las ecuaciones de la hoja de información SIN demostrarlas, pero cuando las utilices, haz referencia a las mismas. No utilices un resultado que hayamos visto en clase SIN ANTES demostrarlo. Todas las preguntas tienen el mismo peso. ¡Buena Suerte!

(1) Considera un agujero negro sin rotación.

(a) Explica cual es su métrica y que significado tiene cada coordenada.

(b) Utiliza las ecuaciones de Euler–Lagrange (o de cualquier otra forma, por ejemplo utilizando las ecuaciones de Hamilton–Jacobi) y muestra que el momento angular $h = r^2\dot{\varphi}$ y la energía $k = (1 - r/r_g)\dot{t}$ de una partícula de prueba son cantidades conservadas. Aquí r_g es el radio gravitacional.

(c) Escribe una relación para la energía total de una partícula de prueba con masa m y explica el significado de cada uno de sus términos. Compáralo con su equivalente clásico.

(d) Muestra que la ecuación de energía puede escribirse como:

$$\dot{r}^2 - c^2(k^2 - 1) = -c^2 \left\{ \frac{\eta}{(r/r_g)^2} - \frac{1}{(r/r_g)} - \frac{\eta}{(r/r_g)^3} \right\}, \tag{1}$$

con $\eta = h^2/r_g^2c^2$. Grafíca la función $-\Phi = \dot{r}^2/c^2 - (k^2 - 1)$ y explica el comportamiento de las distintas órbitas. ¿Por qué es posible que una partícula que cae libremente desde infinito llegue a la singularidad? Calcula el valor de la última órbita estable y explica el por qué es circular.

(2) La ecuación de estado (presión p como función de la densidad de energía e o densidad de masa ρ) para la energía oscura en el universo está dada por:

$$p_X = \omega c^2 \rho_X, \tag{2}$$

done ω es una constante negativa menor a $-1/2$ (y muy probablemente ~ -1 de acuerdo a observaciones de las fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo en microondas). Muestra que:

(a)

$$\rho_X \propto R^{-3(1+\omega)}, \tag{3}$$

$$\rho_X / \rho_M \propto (1+z)^{3\omega}, \tag{4}$$

donde ρ_M es la densidad de masa y z es el corrimiento al rojo.

(b) Muestra que el parámetro de desaceleración está dado por:

$$q_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\omega\Omega_X \sim \frac{1}{2} + \omega \tag{5}$$

Explica con esto el por qué $\omega < -1/2$ implica una expansión acelerada.

(c) Muestra que la constante de Hubble $H(z)$ está dada por:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_X \exp\left\{ 3 \int_0^z [1 + \omega(x)] \, d\ln(1+x) \right\} \tag{6}$$

(d) Muestra que para que el universo se recolapse es necesario que $\omega > -1/3$. ¿Qué deduces de esto?

(3) Escribe un ensayo sobre agujeros negros. Especifica todo lo que puedas en este ensayo. Utiliza matemáticas necesarias (pero no muchas) y física, mucha física. El escrito debe por lo menos contener lo siguiente. Explica que es un un agujero negro de Schwarzschild y de Kerr. Especial énfasis debe hacerse sobre que es el horizonte y las singularidades que existen en estos agujeros. Explica que es la energía de amarre y como se extrae energía de un agujero negro mediante el proceso de Penrose. Menciona que es la radiación de Hawking y sus consecuencias cosmológicas. Finalmente menciona los posibles candidatos en astrofísica a agujeros negros y como los agujeros negros supermasivos (grandes) y galácticos (pequeños) son versiones grandes y chicas del mismo objeto (relaciones de escala).

Hoja de información[†]

Ecuaciones de Friedmann:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0. \tag{7}$$

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G R\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \tag{8}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2}. \tag{9}$$

Métricas de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{10}$$

Métrica de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist:

$$\begin{aligned} ds^2 =& \frac{(\Delta - a^2\sin^2\theta)dt^2}{\Sigma}c^2dt^2 - 2a\sin^2\theta\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma}dtd\varphi - \\ &- \frac{(r^2 + a^2) - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2, \end{aligned} \tag{11}$$

en donde

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{12}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2GMr/c^2. \tag{13}$$

[†]Puedes utilizar cualquier ecuación en esta página sin demostrarla.