Gravitación Astrofísica
Examen–Tarea

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>
http://www.astroscu.unam.mx/~sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Noviembre 21, 2001

En todos tus cálculos enfatiza la física y justifica extensamente todo lo que hagas. En particular, si utilizas tablas de integrales para algo que de verdad no puedes resolver escribe la referencia. ¡Buena Suerte!

(1) Consideremos una masa de fluido muy grande cuyas partes se encuentran juntas gracias a su atracción gravitacional. El ejemplo astrofísico mas obvio de esto es una estrella. Si el fluido no rota estará en equilibrio al rotar y su presión y densidad tendrán simetría esférica.

(a) En el caso no–relativista, muestra que las ecuaciones de la hidrodinámica implican que la condición de equilibrio hidrostático para este cuerpo astronómico se puede escribir como:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho. \tag{1}$$

Cuando las ecuaciones de la hidrodinámica se tienen que escribir en la presencia de un campo gravitacional significante hay que reemplazar algunas derivadas ordinarias en las ecuaciones de movimiento por derivadas covariantes†. La ecuación de continuidad, la ecuación de Euler y la

†La derivada covariante del cuatro–vector A^i está dada por:

$$A^i{}_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl}A^k, \tag{2}$$

donde los símbolos de Christoffel Γ^i_{kl} están dados por:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \tag{3}$$

ecuación de conservación de la entropía se escriben de la siguiente manera:

$$n^k{}_{;k} = 0 \tag{4}$$

$$\omega u^k u_{i;k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} \tag{5}$$

$$(\sigma u^i)_{;i} = 0. \tag{6}$$

que se obtiene de pedir $T^k{}_{i;k} = 0$. En relatividad general se dice que un campo es *estático* si el cuerpo que produce el campo se encuentra fijo en el sistema de referencia en el cual el tensor métrico g_{ik} no depende de la componente temporal x^0. De esta manera ambas direcciones del tiempo son equivalentes y entonces escogiendo un sistema de referencia adecuado el intervalo ds no debe variar cuando se cambie el signo de x^0. Así,

$$g_{0\alpha} = 0, \tag{7}$$

para dicho campo.

(b) Muestra que si la cuatro–velocidad u^i se define como $u^i = dx^i/ds$ entonces, si además la tres velocidad del fluido es cero (el gas en la estrella no rota) se sigue que:

$$u^\alpha = 0, \qquad u^0 = 1/\sqrt{g_{00}}. \tag{8}$$

(c) Cuando el campo gravitacional está en equilibrio, este mismo es estático. Con esto y utilizando las relaciones anteriores muestra que la condición de equilibrio hidrostático para una gran masa de fluido que no rota está dada por:

$$\frac{1}{\omega}\mathbf{grad}p = -\frac{1}{2}\mathbf{grad}\left(\ln g_{00}\right). \tag{9}$$

Muestra que en el límite no–relativista, la ec.(9) se convierte en la ec.(1)

(2) Es costumbre en algunos problemas de la física utilizar un sistema de unidades tal que $c = k_B = \hbar = 1$, donde c es la velocidad de la luz, k_B la constante de Boltzman y $\hbar$ la constante de Plank.

(a) Muestra que está elección es dimensionalmente posible y que las dimensiones [ ] básicas están relacionadas entonces por:

♰ [Energía] = [Masa] = [Temperatura] = [Longitud]$^{-1}$ = [Tiempo]$^{-1}$

Para este problema, utilizaremos no esta convención pero una ligeramente distinta: $G = c = 1$, donde G es la constante gravitacional de Newton. Consideremos ahora el límite post–Newtoniano y definamos:

$$\phi = \frac{1}{2}\left(1 - g_{00}\right), \qquad a_i = g_{0i}, \tag{10}$$

donde ϕ es el potencial gravitacional.

(b) Muestra que si el campo gravito–eléctrico $\mathfrak{g}$ y el gravito–magnético $\mathfrak{h}$ están dados por:

$$\mathfrak{g} = -\nabla\phi, \qquad \mathfrak{h} = \nabla \wedge \mathfrak{a}, \tag{11}$$

entonces se satisfacen las ecuaciones tipo Maxwell de la gravedad:

$$\nabla \cdot \mathfrak{g} = -4\pi\rho, \tag{12}$$
$$\nabla \cdot \mathfrak{h} = 0, \tag{13}$$
$$\nabla \wedge \mathfrak{g} = 0, \tag{14}$$
$$\nabla \wedge H = -4\left\{4\pi\rho v - \frac{\partial g}{\partial t}\right\}. \tag{15}$$

junto con la ecuación de movimiento (la fuerza de Lorentz):

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \mathfrak{g} + v \wedge \mathfrak{h}. \tag{16}$$

(c) Compara estas ecuaciones con las ecuaciones de Maxwell. ¿Qué diferencias encuentras?

(d) Consideremos de ahora en adelante un agujero negro que rota con momento angular $J = aM$. Para el límite $r \gg M$, donde el espacio es prácticamente plano, muestra que las ecuaciones de Maxwell implican que el campo gravito–eléctrico del agujero está dado por:

$$\mathfrak{g} = -M\frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}, \tag{17}$$

y que utilizando el concepto del radio giromagnético podemos identificar a $\mathbf{J}/2$ como el momento dipolar giromagnético.

(e) Muestra que el campo gravito–magnético de un dipolo magnético está dado por:

$$\mathfrak{h} = \frac{3(\mathbf{J}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{J}r^2}{r^5}, \tag{18}$$

donde $J = aM$ es el momento angular.

(f) Calcula la torca $\mathbf{G}$ gravito–magnética que el agujero ejerce sobre un anillo de masa a su alrededor (piensa en un disco de acreción) integrando la torca por unidad de masa sobre el anillo ($\mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \mathfrak{h})$) para obtener:

$$\mathbf{G} = \frac{2\mathbf{J} \wedge \mathbf{l}}{r^3}, \tag{19}$$

y concluye que la frecuencia de precesión gravito–magnética $\boldsymbol{\Omega}_p$ está dada por:

$$\boldsymbol{\Omega}_p = 2\mathbf{J}/r^3 \tag{20}$$

La importancia de esta precesión en agujeros negros astrofísicos es que nos da un mecanismo mediante el cual un disco de acreción debe permanecer en el plano ecuatorial del agujero y de esta manera comunicar la dirección giroscópicamente estable a los jets ultrarelativistas que emanan del mismo.

(3) Considera un universo dominado por materia.

(a) Muestra que la coordenada de comovimiento r está dada por:

$$r = \frac{2c}{H_0(\Omega_0 - 1)^{1/2}} \left\{ \arctan \left(\frac{\Omega_0 z + 1}{\Omega_0 - 1} \right)^{1/2} - \arctan \left(\Omega_0 - 1 \right)^{-1/2} \right\}, \qquad (21)$$

como función del corrimiento al rojo z.

(b) Utilizando la métrica de Robertson–Walker (o de cualquier otra manera) muestra que el elemento de tres–volumen dV correspondiente a la hipersuperficie $x^0 = \text{const}$ está dado por[†]:

$$dV = R^3 \mathfrak{R}^2 \sin^2(r/\mathfrak{R}) \sin\theta d\theta d\varphi dr \qquad (23)$$

(c) Muestra también que la distancia efectiva $D = \mathfrak{R}\sin(r/\mathfrak{R})$ está dada por:

$$D = \frac{2c}{H_0 \Omega_0^2 (1+z)} \left\{ \Omega_0 z + (\Omega_0 - 2) \left[(\Omega_0 z + 1)^{1/2} - 1 \right] \right\} \qquad (24)$$

¿Qué significado físico tiene D?

(d) Considera una distribución cosmológica discreta (distribución de galaxias) y asume que tienen un espectro en forma de potencias de tal manera que la luminosidad de la fuente es $L(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$. Muestra entonces que la densidad de flujo de la fuente $S(\nu_0)$ (es decir, la cantidad de energía recibida por unidad de tiempo, por unidad de área, por unidad de ancho de banda $Wm^{-2}Hz^{-1}$) está dada por:

$$S(\nu_0) = \frac{L(\nu_0)}{4\pi D^2 (1+z^2)^{1+\alpha}} \qquad (25)$$

(e) Sea N_0 el número de galaxias por unidad de volumen en la época presente. Muestra que si este número es constante a medida que el universo se expande, entonces el número de galaxias por unidad de volumen n por unidad de ángulo sólido está dado por:

$$dn = N_0 D^2 dr \qquad (26)$$

[†]Te puede ser útil saber que el elemento de tres–volumen para un espacio curvo está dado por $dS^{klm}\sqrt{-g}$, donde $g = \det(g_{ik})$ (o sea, al integrar, hay que considerar el Jacobiano de la transformación) y que el teorema de Gauss es:

$$\sqrt{-g} dS_i = -\frac{1}{6}\sqrt{-g}\epsilon_{iklm} dS^{klm} \qquad (22)$$

(f) Finalmente, calcula la intensidad de fondo $I(\nu_0)$ debida a esta distribución uniforme de galaxias y muestra que:

$$I(\nu_0) \equiv \int S(\nu_0) dn = \frac{c}{H_0} \frac{L(\nu_0) N_0}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{(\Omega_0 z + 1)^{1/2} (1+z)^{2+\alpha}} \tag{27}$$

y muestra que para un universo Newtoniano está integral diverge.

Este último resultado se conoce como la paradoja de Olbers pues este individuo se dio cuenta que en un universo isotrópico, Euclidiano e infinito, la radiación de fondo diverge.