Astrofísica Relativista
Examen

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>
http://www.astroscu.unam.mx/~sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Octubre 03, 2003

Contesta TANTAS preguntas como sea posible. En todos tus cálculos enfatiza la física y explica (¡dí no a las matemáticas sin sentido!). Puedes utilizar las ecuaciones de la hoja de información SIN demostrarlas, pero cuando las utilices, haz referencia a las mismas. No utilices un resultado que hayamos visto en clase SIN ANTES demostrarlo. Todas las preguntas tienen el mismo peso. El examen tiene una duración de cuatro horas. ¡Buena Suerte!

(1) Considera un agujero negro sin rotación.

(a) Explica cual es su métrica y que significado tiene cada coordenada.

(b) Utiliza las ecuaciones de Euler–Lagrange (o de cualquier otra forma, por ejemplo utilizando las ecuaciones de Hamilton–Jacobi) y muestra que el momento angular $h = r^2\dot{\varphi}$ y la energía $\xi = (1 - r/r_S)\dot{t}$ de una partícula de prueba son cantidades conservadas. Aquí r_S es el radio de Schwarzschild y $\dot{[\,]}$ es la derivada con respecto al tiempo propio τ.

(c) La superficie de una estrella, que ocurre en $r = R$ es tal que su presión es igual a cero y debido a la simetría esférica de la misma entonces los puntos sobre la misma siguen geodésicas como tiempo que satisfacen $d\Omega = 0$. Muestra que la métrica de Schwarzschild evaluada en la superficie de la estrella es tal que

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\xi^2}\left(1 - \frac{r_S}{R}\right)^2 \left(\frac{r_S}{R} - 1 + \xi^2\right). \tag{1}$$

Muestra además que cuando $t \to \infty$, entonces $\dot{R} \to 0$ y que $R \to r_S$. También muestra que R alcanza un valor máximo igual a $r_S/\left(1 - \xi^2\right)$. De aquí que el colapso pueda pensarse como que empieza con velocidad igual a cero al radio R_{max} y se aproxima de manera asintótica a R_S.

(d) Muestra que en términos de la derivada con respecto al tiempo propio la superficie de la estrella obedece

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{r_S}{R} - 1 + \xi^2\right) = \left(1 - \xi^2\right)\left(\frac{R_{max}}{R} - 1\right). \tag{2}$$

De aquí muestra que la superficie de la estrella cae desde $R = R_{max}$ hasta $R = r_S$ en un tiempo propio finito y que de hecho la superficie de la estrella cae hasta $R = 0$ en un tiempo propio finito $\tau = \pi M/\left(1 - \xi^2\right)^{3/2}$.

(e) En el caso de geodésicas radiales nulas la métrica de Schwarzschild es $c^2dt^2 = dr^2/\left(1 - r_S/r\right)^2 \equiv dr_\star^2$. Muestra que

$$r_\star = r + r_S \ln\left|\frac{r - r_S}{r_S}\right|. \tag{3}$$

La coordenada radial de Rogge-Wheeler $r_\star$ es válida para el rango $r_S \leq r < \infty$ con $-\infty < t < \infty$.

(f) Define la *coordenada radial nula hacia adentro* v como $v \equiv ct + r_\star$, con $-\infty < v < \infty$, y muestra que la métrica toma la forma de la métrica de Eddington–Finkelstein dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dv^2 - 2drdv - r^2 d\Omega^2. \tag{4}$$

Esta métrica está definida únicamente para $r > r_S$. Explica donde es singular esta métrica y con esto justifica el por que se puede hacer una continuación analítica de la misma para $r < r_S$.

(g) Muestra que los conos de luz se "voltean" hacia el origen de coordenadas a medida que $r \to r_S$ partiendo de $r > r_S$. Para esto muestra que

$$2\mathrm{d}r\mathrm{d}v = -\mathrm{d}s^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\mathrm{d}v^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2 \leq 0, \tag{5}$$

para lineas de universo como–tiempo o nulas tales que $r < r_S$. De aquí muestra que, como $\mathrm{d}v > 0$ para lineas de universo dirigidas al futuro, entonces $\mathrm{d}r \leq 0$ y con esto argumenta que los puntos $r < r_S$ están causalmente desconectados con respecto a los puntos $r > r_S$.

(2) Escribe un ensayo sobre acreción y discos de acreción. Especifica todos los tipos de acreción que se conocen y como funciona cada uno de estos procesos. Utiliza matemáticas necesarias (pero no muchas) y física, mucha física. El escrito debe por lo menos contener lo siguiente. Explica que es el factor de eficiencia ξ mediante el cual se convierte energía en reposo por unidad de tiempo $\dot{m}c^2$ en luminosidad y como está relacionado este factor con el radio de Schwarzschild. Menciona extensamente como funciona la acreción esférica sin y con rotación. De aquí argumenta como se forma un disco de acreción. Explica en que consiste el balance hidrostático en un disco de acreción. Explica que es un disco–α y un disco delgado. Generaliza estos resultados a un disco de acreción que gira alrededor de un agujero negro. ¿A qué radio se encuentra la frontera del disco de acreción interno? Muestra que la luminosidad tiene la misma forma que lo que se obtiene en el caso de discos alrededor de estrellas. ¿Qué valor tiene el factor de eficiencia para un disco alrededor de una estrella de neutrones, alrededor de un agujero negro de Schwarzschild y un agujero negro de Kerr?

(3) Considera el universo como un espacio isotrópico curvo cuya métrica espacial mas general está dada por

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\rho^2 + R_c^2 \sin^2(\rho/R_c)\mathrm{d}\Omega^2. \tag{6}$$

en términos de las coordenadas cilíndricas $(\rho,\ \theta,\ \varphi)$. Esta métrica también puede escribirse en términos de las coordenadas $(\chi,\ \theta,\ \varphi)$ como

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{\mathrm{d}x^2}{1 - \kappa x^2} + x^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{7}$$

(a) Muestra utilizando el concepto de observador fundamental y la isotropía del universo en expansión que la métrica puede escribirse como

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left\{dr^2 + \mathfrak{R}^2 \sin^2(r/\mathfrak{R})d\Omega^2\right\}, \tag{8}$$

en donde $\mathfrak{R}$ es el radio de curvatura del universo evaluado al tiempo $t = t_0$ y $R(t)$ es el factor de escala del universo normalizado al tiempo $t = t_0$, es decir, $R(t_0) = 1$.

(b) Considera un universo de polvo con constante cosmológica diferente de cero.

(I) Muestra que la ecuación de estado del vació está dada por

$$p = -\rho_v c^2. \tag{9}$$

(II) Interpreta el valor no–positivo de la presión en la ec.(9) como una constante cosmológica (antigravedad) y muestra que en este caso

$$\Lambda = 8\pi G\rho_v. \tag{10}$$

(III) Define apropiadamente el parámetro de densidad Ω_Λ asociado con la constante cosmológica Λ y muestra a partir de las ecuaciones de Friedmann (o de cualquier otra manera) que

$$\frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} = H_0^2\{(\Omega_0 + \Omega_\Lambda) - 1\}. \tag{11}$$

(IV) Muestra que cuando $\Lambda > 0$ (antigravedad) entonces $\dot{R}$ alcanza un mínimo $\dot{R}_{min}$ que ocurre cuando

$$R_{min} = \left(\frac{\Omega_0}{2\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} = \left(\frac{4\pi G\rho_0}{\Lambda}\right)^{1/3}, \tag{12}$$

$$\dot{R}^2_{min} = 3H_0^2\left(\frac{\Omega_\Lambda\Omega_0^2}{4}\right)^{1/3} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} = \Lambda^{1/3}\left(\frac{3\Omega_0 H_0^2}{2}\right)^{2/3} - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2}. \tag{13}$$

(V) Muestra que cuando $\dot{R}^2_{min} > 0$, entonces $R(t)$ crece por siempre y $R(t)$ tiende al universo de de Sitter (plano) para valores suficientemente grandes

$$R(t) \propto \exp\left\{\Omega_{\Lambda}^{1/2} H_0 t\right\}, \qquad \text{para } t \to \infty. \tag{14}$$

(VI) Explica brevemente en que consiste la fase inflacionaria del universo y por qué es necesario para explicar el aplanado y la causalidad del universo. ¿Qué otro modelo se ha propuesto para evitar la etapa inflacionaria?

Hoja de información*

Ecuaciones de Friedmann:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0. \tag{15}$$

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G R\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda R, \tag{16}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{3}\Lambda R^2. \tag{17}$$

Métricas de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{18}$$

Métrica de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist:

$$\begin{aligned} ds^2 =& \frac{(\Delta - a^2\sin^2\theta)dt^2}{\Sigma}c^2dt^2 - 2a\sin^2\theta\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma}dtd\varphi - \\ & -\frac{(r^2 + a^2) - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2, \end{aligned} \tag{19}$$

en donde

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{20}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2GMr/c^2. \tag{21}$$

*Puedes utilizar cualquier ecuación en esta página sin demostrarla.