Gravitación Astrofísica
Examen–tarea

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>
http://www.astroscu.unam.mx/~sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Octubre 03, 2003

Contesta TANTAS preguntas como sea posible. En todos tus cálculos enfatiza la física y justifica extensamente todo lo que hagas. En particular, si utilizas tablas de integrales para algo que de verdad no puedes resolver escribe la referencia. El examen debe ser entregado a mas tardar a las 09.00hrs del lunes 06 de octubre del 2003. ¡Buena Suerte!

(1) En este problema utilizaremos un sistema de unidades de tal forma que $G = c = 1$. Este es un sistema de unidades adecuado para el estudio de la geometrodinámica. Consideremos ahora el flujo de gas (acreción) que cae hacia una masa central m. La métrica del espacio tiempo producida por esta masa central es la métrica de Schwarzschild que en este caso toma la forma

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = (1 - 2m/r)\, dt - (1 - 2m/r)^{-1}\, dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{1}$$

Cuando las ecuaciones de la hidrodinámica se tienen que escribir en la presencia de un campo gravitacional significante hay que reemplazar algunas derivadas ordinarias en las ecuaciones de movimiento por derivadas covariantes†. La ecuación de continuidad,

† La derivada covariante del cuatro–vector A^i está dada por

$$A^i{}_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl} A^k, \tag{2}$$

la ecuación de Euler y la ecuación de conservación de la entropía se escriben respectivamente de la siguiente manera

$$n^k{}_{;k} = 0 \tag{4}$$

$$\omega u^k u_{i;k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} \tag{5}$$

$$(\sigma u^i)_{;i} = 0. \tag{6}$$

Las dos últimas relaciones se obtienen de pedir que la divergencia generalizada del tensor de energía–momento T_{ik} sea nula, es decir,

$$T^k{}_{i;k} = 0. \tag{7}$$

(a) Muestra que a partir de la ec.(7) se obtienen las ecs.(5)-(6).

(b) Muestra que en el caso de un flujo de acreción estacionario ($\partial/\partial t = 0$), la ec.(4) y la ec.(7) implican que

$$\left(u^0\right)^2 = \frac{1}{1-2m/r}\left(1 + \frac{\vartheta^2}{1-2m/r}\right), \tag{8}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 n\vartheta\right) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\,(e+p)\,\vartheta\sqrt{1-2m/r+\vartheta^2}\right\} = 0. \tag{10}$$

$$\vartheta\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{dp}{dr}\frac{1-2m/r+\vartheta^2}{e+p} - \frac{m}{r^2}, \tag{11}$$

en donde $\vartheta \equiv u^1 = dr/ds$.

(12)

---

donde los símbolos de Christoffel Γ^i_{kl} están dados por

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \tag{3}$$

(c) Muestra con lo anterior que

$$\frac{1}{n^2}(e+p)^2\left(1-2\frac{m}{r}+\vartheta^2\right) = \text{ const } \equiv E \tag{13}$$

$$n\frac{de}{dn}-e-p=0 \tag{14}$$

Compara la ec.(14) con la la primera ley de la termodinámica. ¿Qué diferencias y similitudes observas?

(d) Muestra que la velocidad ϑ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta}\left\{2\Omega^2-\frac{m}{r\,(1-2m/r+\vartheta^2)}\right\}+\frac{dr}{r}\left\{\Omega^2-\frac{\vartheta^2}{1-2m/r+\vartheta^2}\right\}=0, \tag{15}$$

en donde

$$\Omega^2 \equiv \frac{d\ln(e+p)}{d\ln n}-1. \tag{16}$$

Si alguno de los factores dentro de las llaves de la ec.(15) se anula, entonces las soluciones son multivaluadas para r o ϑ. Para que el flujo en acreción alcance el centro es necesario que la velocidad se incremente monotonicamente hacia el centro de la configuración. Muestra entonces que los puntos críticos están dados por

$$\vartheta_c^2 = m/2r_c, \qquad \Omega_c^2 = \frac{\vartheta^2}{1-3\vartheta_c^2}. \tag{17}$$

Finalmente muestra que el punto crítico está se encuentra a un radio mayor al radio de Schwarzschild.

(e) Considera que el gas en acreción es un gas politrópico cuya ecuación de estado es $p \propto n^\kappa \propto nT$.

(I) Supongamos que $\kappa = 4/3$ y que la temperatura T_∞ evaluada en infinito, en donde $\vartheta_\infty = 0$, es diferente de cero. Muestra entonces que

$$T_c \approx 2T_\infty, \qquad T_S \approx \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{m}{r_S}\right)^{2/3} T_\infty^{1/2}, \tag{18}$$

en donde T_S y T_c representan valores de la temperatura evaluados en el radio de Schwarzschild y en el punto crítico respectivamente. Para mostrar la segunda relación de la ec.(18) asume que la temperatura T_S evaluada al radio de Schwarzschild es tal que $T_S \ll 1$.

(II) Considera que $\kappa = 5/3$ y muestra que

$$T_S \approx 0.3 \left(\frac{m}{r_S} \right)^{4/3}, \qquad u_c^4 \approx \frac{20}{27} T_\infty. \tag{19}$$

(2) En este ejercicio utiliza unidades de medición de tal forma que $c = G = 1$, como se hizo en el ejercicio anterior. Consideremos una masa de fluido muy grande cuyas partes se encuentran juntas gracias a su atracción gravitacional. El ejemplo astrofísico mas obvio de esto es una estrella. Si el fluido no rota, esta masa estará en equilibrio y su presión y densidad tendrán simetría esférica. En relatividad general se dice que un campo es *estático* si el cuerpo que produce el campo se encuentra fijo en el sistema de referencia en el cual el tensor métrico g_{ik} no depende de la componente temporal x^0. De esta manera ambas direcciones del tiempo son equivalentes y entonces escogiendo un sistema de referencia adecuado el intervalo ds no debe variar cuando se cambie el signo de x^0. Así,

$$g_{0\alpha} = 0, \tag{20}$$

para dicho campo.

(b) Muestra que la cuatro–velocidad $u^i = dx^i/ds$ es tal que

$$u^\alpha = 0, \qquad u^0 = 1/\sqrt{g_{00}}. \tag{21}$$

debido a que la tres–velocidad es cero (el gas de la estrella no rota).

(c) Cuando el campo gravitacional está en equilibrio, este mismo es estático. Con esto y utilizando las relaciones anteriores muestra que la condición de equilibrio hidrostático para una gran masa de fluido que no rota está dada por

$$\frac{1}{\omega} \mathbf{grad} p = -\frac{1}{2} \mathbf{grad} \left(\ln g_{00} \right). \tag{22}$$

Muestra que en el límite Newtoniano, la ec.(22) se convierte en la ecuación de soporte hidrostático vista en el curso.

(d) Debido a la simetría central que posee el objeto, su métrica está descrita por la métrica de Schwarzschild, ec.(1), y entonces

$$g_{00} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \approx 1 + 2\phi. \tag{23}$$

Muestra que en este límite la ec.(22) toma la forma

$$\mathbf{grad}\, p = -\omega \mathbf{grad}\, \phi. \tag{24}$$

(e) Utilizando las ecuaciones de Einstein –cf. ec.(46)– para la métrica de Schwarzschild y la ec.(23) muestra que

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r - 2m(r)}, \tag{25}$$

y por lo tanto

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{r} \frac{\omega \left(m(r) + 4\pi r^3 p \right)}{r - 2m(r)}. \tag{26}$$

(f) Considera que la densidad de energía $e = \rho$ es una constante ρ_0.

(I) Muestra que

$$m(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0. \tag{27}$$

(II) Define

$$y = p/\rho_0, \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{8\pi}{3} G \rho_0 = \frac{2M}{R^3}, \tag{28}$$

donde M y R son respectivamente la masa total y el radio de la configuración de gas (estrella relativista) y muestra que la solución a la ec.(26) está dada por

$$y = \frac{\left(1 - \gamma r^2\right)^{1/2} - \left(1 - \gamma R^2\right)^{1/2}}{3 \left(1 - \gamma R^2\right)^{1/2} - \left(1 - \gamma r^2\right)^{1/2}}. \tag{29}$$

(III) Muestra que la presión central p_c toma el valor

$$p_c = \rho_0 \frac{1 - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3 (1 - 2M/R)^{1/2} - 1}. \tag{30}$$

Finalmente muestra que cuando la presión central se eleva, i.e. cuando el radio R decrece, entonces se alcanza el valor límite dado por

$$R \to \frac{9}{8} r_s, \qquad \text{cuando} \qquad p_c \to \infty. \tag{31}$$

(3) Considera un universo dominado por materia. Las ecuaciones de la hidrodinámica en coordenadas Lagrangianas están dadas por

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \boldsymbol{v}, \tag{32}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \tag{33}$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \tag{34}$$

(a) Perturba las ecs.(32)-(34) a primer orden, es decir,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \delta \boldsymbol{v}, \qquad \rho = \rho_0 + \delta\rho, \qquad p = p_0 + \delta p, \qquad \phi = \phi_0 + \delta\phi, \tag{35}$$

y obten el siguiente grupo de ecuaciones

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \delta \boldsymbol{v} = 0,$$
$$\frac{d\delta\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \delta \boldsymbol{v}}{\partial t} + \delta \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left(\delta p\right) - \nabla \left(\delta\phi\right),$$
$$\nabla^2 \left(\delta\phi\right) = 4\pi G \delta\rho.$$

La coordenada radial ρ para espacios isotrópicos curvos en cosmología puede escribirse como un 'radio–vector" de tal forma que $\boldsymbol{\rho} = R(t)\mathbf{r}$, así $d\boldsymbol{\rho}/dt = \boldsymbol{v} = \dot{R}\mathbf{r} + R(t)d\mathbf{r}/dt = H(t)\boldsymbol{\rho} + R(t)d\mathbf{r}/dt$. Cuando $d\mathbf{r}/dt = 0$ entonces se obtiene la ley de Hubble. De esta manera, el término $R(t)d\mathbf{r}/dt$ puede verse como una pequeña modificación a la ley de Hubble, o bien, una perturbación a primer orden de esta ley. De esta manera, utilizando el hecho de que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{v}$, entonces podemos identificar

$$\delta \boldsymbol{v} = R(t) \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{36}$$

(b) A partir de esta última relación y las ecuaciones calculadas en el inciso (a) muestra que la densidad $\delta\rho$ obedece (¡recuerda que d/dt y ∇ no conmutan!)

$$\frac{d^2\delta\rho}{dt^2} + 2\frac{\dot{R}}{R}\frac{d\delta\rho}{dt} = \nabla^2\delta p + \rho_0\nabla^2\delta\phi. \tag{37}$$

(c) Para flujos adiabáticos (como la expansión del universo) la presión y la densidad a primer orden están relacionados por la velocidad del sonido c mediante la siguiente relación: $\delta p = c^2\delta p$ (recuerda que $c^2 \equiv (\partial p/\partial\rho)_s$) y utilizando la última relación del inciso (i) muestra que

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{R}}{R}\frac{d\Delta}{dt} = \frac{c^2}{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\right)\Delta + 4\pi G\Delta\rho. \tag{38}$$

(d) Busca soluciones para la ec.(38) de la forma $\Delta \propto \exp i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ y muestra que se obtiene una ecuación de onda

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{R}}{R}\frac{d\Delta}{dt} = \left\{4\pi G\rho_0 - k^2c^2\right\}\Delta, \tag{39}$$

donde $\mathbf{k}_c$ es el vector de onda en coordenadas de comovimiento y está relacionado con el vector de onda propio $\mathbf{k}$ mediante la relación $\mathbf{k}_c = R\mathbf{k}$.

(e) Para el caso del universo de Einstein–de Sitter ($\Omega_0 = 1$), muestra que la ec.(39) puede reescribirse como

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + \frac{4}{3t}\frac{\dot{R}}{R}\frac{d\Delta}{dt} - \frac{2}{3t^2}\Delta = 0 \tag{40}$$

Busca soluciones a esta ecuación de la forma $\Delta \propto t^n$ y muestra que las soluciones a la ecuación algebraica que se encuentra al sustituir este valor de Δ en la ecuación diferencial, ec.(40), tiene soluciones $n = 2/3,\ -1$. Las soluciones con $n = -1$ corresponden a un modo de decaimiento y la solución $n = 2/3$ es la solución correspondiente al modo de crecimiento del contraste de densidades. Muestra que para este caso

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto R = (1+z)^{-1}. \tag{41}$$

Este resultado es sumamente importante, pues contrario a lo que sucede para el caso $\dot{R} = 0$ donde el crecimiento del contraste de densidades se lleva a cabo de manera exponencial, este crecimiento ocurre algebraicamente aquí.

(f) En el universo de Milne ($\Omega_0 = 0$), se tiene que $R(t) = H_0 t$. Muestra que la ec.(39) es en este caso

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + \frac{2}{t}\frac{d\Delta}{dt} = 0. \tag{42}$$

Encuentra soluciones del tipo $\Delta \propto t^n$ y muestra que $n = 0,\ -1$ son soluciones. El modo $n = 1$ decae, mientras que el otro modo implica que el contraste de densidades es constante

$$\Delta = \text{const}. \tag{43}$$

Este resultado no es de extrañarse pues si no hay gravedad, no debe haber razón alguna para que las perturbaciones en la densidad se amplifiquen.

(g) Utilizando la relación calculada en el curso para el caso de hidrodinámica relativista,

$$\frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} - u^k\frac{\partial p}{\partial x^k} = 0,$$

muestra que

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\gamma\right\} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\gamma\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \frac{\gamma}{c^2}\frac{dp}{dt}, \tag{44}$$

donde γ es el factor de Lorentz para la velocidad $\boldsymbol{v}$. Si consideramos que el movimiento microscópico del gas es relativista (la ecuación de estado corresponde a la de un gas ultrarelativista), pero su movimiento macroscópico es no–relativista ($\gamma \sim 1 + v^2/2c^2$) entonces muestra que la ec.(44) que representa *la conservación de la energía* toma la forma

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{4}{3}\rho\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right). \tag{45}$$

Las ecuaciones de Einstein

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}, \tag{46}$$

al contraerse en los índices i, y k implican que

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T \tag{47}$$

en donde $R = R^i_i$ y $T = T^k_k$. Sustituyendo la ec.(47) en la ec.(46), las ecuaciones de Einstein pueden ser reescritas como

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{48}$$

Cuando el campo gravitacional tiende a su límite Newtoniano, entonces

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00}, \tag{49}$$

y la componente temporal del tensor métrico está dada por

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \tag{50}$$

La ec.(49) es la ecuación de Poisson para el campo gravitacional. Comparando la ec.(49) con la ec.(48) y la ec.(46) se ve que una corrección a esta relación está dada por

$$\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right), \tag{51}$$

(h) Utilizando la ec.(51) muestra que la ecuación de Poisson generalizada está dada por

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\left\{\rho + \frac{3p}{c^2}\right\}. \tag{52}$$

Esta ecuación es válida para un gas ultrarelativista con movimientos macroscópicos no–relativistas.

La última relación que se necesita para el análisis es la ecuación de Euler. Como los movimientos macroscópicos del fluido son no–relativistas, entonces la ec.(33) para una presión uniforme inicial es válida

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi. \tag{53}$$

(i) Compara la ec.(45), ec.(52) y la ec.(53) con las ecs.(32)-(34) y muestra que la ecuación que describe el crecimiento de la inestabilidad para el contraste de densidades Λ está dada por

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + 2\frac{\dot{R}}{R}\frac{d\Delta}{dt} = \frac{32\pi G\rho_0}{3}\Delta \tag{54}$$

(j) Finalmente, encuentra soluciones de la forma $\Delta \propto t^n$ a esta última relación y utiliza el hecho de que el factor de escala $R(t) \propto t^{1/2}$ en un universo dominado por radiación para mostrar que

$$\Delta \propto R^2 \propto (1+z)^{-2} \tag{55}$$