Astrofísica Relativista
Examen

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>
http://www.astroscu.unam.mx/~sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Enero 07, 2005

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. Si utilizas notación de Einstein, hazlo de tal manera que los índices latinos tomen valores 1,2,3 y los griegos 0,1,2,3. En todos tus cálculos enfatiza la física y explica (¡dí no a las matemáticas sin sentido!). Puedes utilizar las ecuaciones de la hoja de información SIN demostrarlas, pero cuando las utilices, haz referencia a las mismas. No utilices un resultado que hayamos visto en clase SIN ANTES demostrarlo. Todas las preguntas tienen el mismo peso. El examen tiene una duración de cuatro horas. ¡Buena Suerte! [†]

(1) Considera un universo homogéneo e isotrópico como el nuestro en donde el principio cosmológico es válido.

(a) Define y explica el corrimiento al rojo z aplicado a la recesión de galaxias en el universo. De aquí muestra la ley de Hubble $v = H_0 r$, donde v es la velocidad de recesión de una galaxia, r su distancia y H_0 es la constante de Hubble. ¿Por qué razón la constante de Hubble no es una "verdadera" constante?

[†] El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación igual a cero en el curso y les calificaré con NA en el mismo.

(b) Explica que es el factor de escala $R(t)$ y muestra que la coordenada radial $\rho(t) = R(t)r$. Muestra además que el radio de curvatura $R_c(t) = \mathfrak{R}R(t)$, donde $\mathfrak{R}$ es el radio de curvatura del universo en la época presente.

(c) Utilizando la métrica de Robertson–Walker (18), explica (no lo demuestres matemáticamente en extenso) como se obtienen las ecuaciones de Friedmann (19), (20) y (21). ¿Qué significado geometrodinámico tiene la función escalar $\Lambda(x^{\mu})$. ¿Por qué razón fue introducida en cosmología y que efecto tiene esta directamente sobre la curvatura del universo? Explica el significado de la densidad ρ y su relación completa con la densidad de energía e. ¿Por qué razón utilizamos ρ en vez de e?

(d) Muestra utilizando las ecuaciones de Friedmann que la expansión del universo se lleva acabo de manera adiabática de acuerdo a la primera ley de la termodinámica.

(e) Muestra que el corrimiento al rojo z y el factor de escala $R(t)$ están relacionados mediante la fórmula

$$1 + z = \frac{1}{R(t)}. \tag{1}$$

Muestra que la ley de Hubble en términos de distancias propias $\rho(t)$ está dada por $d\rho/dt = H_0\rho$ y que por lo tanto la constante de Hubble satisface la relación

$$H_0 = \left.\frac{\dot{R}}{R}\right|_{t_0} = \left.\dot{R}\right|_{t_0}. \tag{2}$$

(f) Muestra que en un universo dominado por materia, i.e. modelo de polvo, la densidad crítica ρ_c para mantener cerrado al mismo está dada por

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \tag{3}$$

¿Qué sucede si la densidad del universo ρ_0 hoy en día es mayor a esta densidad crítica? Justifica tu respuesta a esto de manera matemática.

(g) Considera un universo en donde hay constante cosmológica, radiación y materia. Define el parámetro de densidad $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ en donde el subíndice i se refiere a materia (M), radiación (R), curvatura (κ) y constante cosmológica (Λ). Para cada caso, este parámetro de densidad está definido respectivamente por

$$\Omega_M := \frac{8\pi G\rho_{M_0}}{3H_0^2}, \qquad \Omega_R := \frac{8\pi G\rho_{R_0}}{3H_0^2}, \tag{4}$$

$$\Omega_\kappa := -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2} = -\frac{c^2\kappa}{H_0^2}, \qquad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \tag{5}$$

Muestra con esto que la constante de Hubble $H(t)$ definida para cualquier tiempo cósmico t, i.e. la velocidad de expansión del universo, satisface la relación

$$H^2(R) = H_0^2 \left\{ \frac{\Omega_R}{R^4} + \frac{\Omega_M}{R^3} + \frac{\Omega_\kappa}{R^2} + \Omega_\Lambda \right\}. \tag{6}$$

Finalmente muestra con esto que

$$\Omega_M + \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda = 1. \tag{7}$$

(h) Muestra que el espectro de la radiación cósmica de fondo en microondas que es de tipo cuerpo negro permanece como tal a medida que el universo se expande. Demuestra también que la densidad de energía e y la temperatura T de los fotones de la radiación cósmica de fondo en microondas escalan con el factor de escala de acuerdo a las siguientes relaciones

$$e \propto R^{-4}, \qquad \text{y} \qquad T \propto R^{-1}. \tag{8}$$

(i) Explica brevemente que es la energía oscura y como afecta la evolución del universo. ¿Por qué razón observacional fue propuesta? ¿Cuál es su ecuación de estado? También describe que es la materia oscura bariónica y no–bariónica. ¿Por qué razón observacional se cree que exista materia oscura en el universo? ¿Cómo afecta la existencia de materia oscura no–bariónica en el universo a la dinámica del mismo? Si no existe materia oscura en el universo, ¿Cómo pueden explicarse estas últimas observaciones?

(2) Considera un agujero negro de Schwarzschild.

(a) Explica cual es su métrica y que significado tiene cada coordenada.

Cuando la electrodinámica cuántica es aplicada a un agujero negro, se obtiene que la entropía S (entropía de Beckenstein) y la temperatura T (temperatura de Hawking–Zeldovich) del mismo están dadas por

$$S = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A \tag{9}$$

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

en donde $\hbar$ es la constante de Planck en unidades de 2π, k_B es la constante de Boltzman y G la constante de gravitación universal de Newton. La ecuación (9) representa el hecho de que el área A del horizonte de eventos de un agujero es directamente proporcional a la entropía S del mismo.

(a) Explica el significado físico de la temperatura de Hawking–Zeldovich, así como el por qué el hecho de que la entropía sea proporcional al área del agujero ayuda a que la segunda ley de la termodinámica no tenga alguna violación debido a efectos relativistas en la gravitación asociados a la existencia de horizontes de eventos en agujeros negros.

(b) Para un agujero de Schwarzschild, el área A del horizonte de eventos está dada por $A = 4\pi R^2$, donde R el radio de Schwarzschild. Muestra que a medida que la masa M del agujero es perdida mediante radiación de Hawking–Zeldovich, entonces el cambio en la entropía dS del mismo está dado por

$$dS = \frac{8\pi G k_B}{\hbar c} M dM. \tag{12}$$

(c) Muestra que el calor Q está relacionado con la masa del agujero mediante la relación $dQ = TdS = c^2 dM$, y por lo tanto la energía en reposo que pierde el agujero al cambiar su masa desde M_1 hasta M_2 debido a la radiación de Hawking–Zeldovich está dado por $(M_2 - M_1) c^2 < 0$. Muestra también que si se integra TdS sobre toda la masa del agujero se obtiene que $Q = -Mc^2$. Esto sugiere que la energía total del agujero es radiada en forma de calor. De este argumento y usando la primera ley de la termodinámica ($dU = dQ - dW$, con U la energía interna del agujero y W el trabajo). Argumenta el por qué no se hace trabajo sobre el horizonte de eventos a medida que el volumen decrece y por lo tanto la presión evaluada en el horizonte de eventos es prácticamente nula y por lo tanto constante.

(d) Debido a que el proceso de pérdida de energía por radiación de Hawking–Zeldovich se lleva acabo a presión constante, entonces la pérdida de calor es tal que $dQ = Mc_p dT$, en donde c_p representa el calor específico a presión constante. Justifica esta relación y muestra que

$$dT = -\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G}\frac{dM}{M^2}, \tag{13}$$

para obtener

$$c_p = -\frac{8\pi k_B G}{\hbar c}M. \tag{14}$$

Explica el por qué el calor específico es una cantidad negativa (hint: muestra que cuando M decrece, T aumenta).

(e) Si suponemos que el espectro de emisión es tipo cuerpo negro, entonces la pérdida de energía por unidad de tiempo por unidad de área (el flujo F) ocurre mediante la ley de Stephan–Boltzman, es decir,

$$F = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \sigma T^4, \tag{15}$$

en donde $\sigma := \pi^2 k_B^4/60\hbar^3 c^2$ es la constante de Stephan–Boltzman y U es la energía interna del agujero. Muestra con esto que la variación de la masa como función del tiempo está dada por

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\hbar c^4}{15360\,\pi\, G^2}\frac{1}{M^2}, \tag{16}$$

y por lo tanto el tiempo t que tarda un agujero de Schwarzschild en evaporarse está dado por

$$t = \frac{5120\,\pi\, G^2}{\hbar\, c^4}M^3 \tag{17}$$

Explica la importancia de la ecuación (17) aplicada a agujeros negros primordiales de masas $\sim 10^{12}$ kg. ¿Qué sucede con los agujeros de masas intermedias y los supermasivos?

(2) Escribe un ensayo sobre evolución estelar. Utiliza las matemáticas necesarias (pero no muchas) y física, mucha física. El escrito debe por lo menos contener lo siguiente. Explica el criterio de estabilidad gravitacional de Jeans de manera matemática y como se forma una estrella. Define correctamente lo que es una estrella en el universo. Explica que es la energía de amarre gravitacional y que importancia tiene para un objeto gaseoso sumamente masivo. Explica el teorema del virial estelar y las ecuaciones de estructura estelar. ¿Por qué se generan reacciones nucleares en el interior de las estrellas y en que consiste la cadena protón–protón (p–p)? Desarrolla el concepto de presión degenerativa (relativista y no–relativista) de manera cuantitativa y explica su conexión con las enanas blancas y las estrellas de neutrones. Describe la forma en la que acaban su vida las estrellas de diversas masas. Presta atención particular a las estrellas que acaban su vida como supernovas y explica extensamente la importancia química y cosmológica de una supernova en el universo. Describe finalmente que objetos quedan como resultado al final de la evolución estelar.

Hoja de información†

Métrica de Robertson–Walker:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= c^2dt^2 - R^2(t)\left\{dr^2 + \mathfrak{R}^2\sin^2(r/\mathfrak{R})d\Omega^2\right\} \\
ds^2 &= c^2dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{dx^2}{1-kx^2} + x^2d\Omega^2\right\},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Ecuaciones de Friedmann:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0. \tag{19}$$

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G R\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda R, \tag{20}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{3}\Lambda R^2. \tag{21}$$

Métricas de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{22}$$

Métrica de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist:

$$
\begin{aligned}
ds^2 =& \frac{(\Delta - a^2\sin^2\theta)dt^2}{\Sigma}c^2dt^2 - 2a\sin^2\theta\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}dtd\varphi - \\
&-\frac{(r^2+a^2) - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

en donde

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{24}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2GMr/c^2. \tag{25}$$

---

†Puedes utilizar cualquier ecuación en esta página sin demostrarla.