Astrofísica Relativista
Examen–tarea

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>

http://www.astroscu.unam.mx/~sergio

Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM

Ciudad de México, México.

Enero 07, 2005

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. En todos tus cálculos enfatiza la física y justifica extensamente todo lo que hagas. En particular, si utilizas tablas de integrales para algo que de verdad no puedes resolver escribe la referencia. En todo el examen índices griegos toman valores 0,1,2,3 y los índices latinos toman valores 1,2,3. Las unidades han sido escogidas de tal manera que $G = c = 1$, i.e. se ha tomado un sistema de unidades *geometrodinámico*. Este examen debe ser entregado a mas tardar a las 12.00hrs del lunes 10 de enero del 2005[†]. ¡Buena Suerte!

(1) La métrica de Robertson–Walker está dada por

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{dx^2}{1-kx^2} + x^2 d\Omega^2\right\}, \tag{1}$$

(a) Muestra que haciendo los cambios $\kappa\chi^2 \to \chi^2$ y $(R^2/\kappa) \to R$ la métrica se puede escribir como la ecuación (1) pero con la condición de que que en estas nuevas coordenadas, la curvatura solamente toma valores $\kappa = 0, \pm 1$ (universo plano,

[†] El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación de CERO en TODO el curso y les calificaré con NA en el mismo

cerrado y abierto respectivamente) y que el factor de escala en la época presente $R(t_0) = \mathfrak{R}$.

De ahora en adelante consideraremos un universo dominado por cualquier forma de polvo (materia bariónica, materia oscura, etc.) y que contiene una constante cosmológica Λ asociada a su dinámica. Esto es como el universo en donde vivimos en la época presente.

(b) Muestra que las ecuaciones de Friedmann para la velocidad y la aceleración del factor de escala del universo pueden escribirse como

$$\dot{R}^2 + \kappa = \frac{C}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 := h(R,\Lambda), \tag{2}$$

$$\ddot{R}^2 = \frac{R}{3}\left(\Lambda - \frac{3C}{2R^3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial R}\bigg|_\Lambda, \tag{3}$$

en donde la constante (muestra que es constante) $C := 8\pi\rho R^3/3$ y $h(R,\Lambda)$ es una función definida naturalmente por la ecuación (2).

(c) Muestra que el modelo de Eddington–Lemaître corresponde a valores $\Lambda = \Lambda_E$ y $R > R_E$, en donde

$$\Lambda_E = \frac{4}{9C^2}, \qquad R_E = \frac{3C}{2}. \tag{4}$$

El punto $\tilde{R}$ para el cual $\dot{R} = 0$ corresponde a $\tilde{R} = C$. Demuestra también que el modelo estático de Einstein corresponde a valores $\Lambda = \Lambda_E$ y $R = R_E$.

(d) Solamente para este inciso haz los re–escalamientos $R \to CR$, $\Lambda \to \Lambda C^2$ y $t \to Ct$. Muestra que esto equivale a escoger $C = 1$ y por lo tanto a un reescalamiento de unidades. Haz un diagrama Λ vs R para valores $h = 0, \pm 1$ variando la curvatura $\kappa = 0, \pm 1$. Identifica la línea horizontal $\Lambda = \Lambda_E$ y muestra que las curvas Λ_E, $\ddot{R} = 0$ y $h = 1$ se intersectan exactamente en el punto de los modelos estáticos de Einstein.

(e) Muestra que si a *cualquier* época en el universo se definen los parámetros (cf. examen en clase)

$$\Omega_M := \frac{8\pi\rho}{3H^2}, \quad \Omega_\kappa := -\frac{\kappa}{R^2H^2}, \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H^2}, \tag{5}$$

entonces se cumple la relación

$$\Omega_M + \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda = 1, \tag{6}$$

para cualquier tiempo cósmico t. Muestra además que si se conoce H_0 de manera observacional, entonces se conoce directamente Λ y ρ_0 de las observaciones de Ω_{Λ_0} y Ω_{κ_0}. Si $\kappa \neq 0$ muestra entonces que el valor de R_0 es entonces conocido. ¿Qué significado físico tiene esta última condición?

(f) Definamos $\Lambda = \alpha\Lambda_E$ y $R_0 = \beta\tilde{R}$, en donde los parámetros α y β son cantidades adimensionales. Muestra que si en un diagrama Ω_Λ vs Ω_M se grafican las curvas correspondientes a $\alpha = \text{const}$, estas mismas corresponden a valores de $C = \text{const}$. Demuestra además que

$$C = H^2 R^3 \Omega_M = \frac{|k|^3}{H_0^2 \beta^3 \Omega_{M_0}}, \tag{7}$$

y que por lo tanto cuando la curvatura $\kappa \neq 0$, los puntos geométricos $\Lambda = \alpha\Lambda_E$ para $\alpha = \text{const}$ corresponden a que la siguiente ecuación sea satisfecha

$$\left(\frac{\Omega_M}{2\Omega_\Lambda}\right)^2 \pm \alpha \left(\frac{\Omega_\kappa}{3\Omega_\Lambda}\right) = 0. \tag{8}$$

En el caso en que $\kappa = 0$, entonces $\alpha \to \infty$ debido a que $C \to \infty$ y $\Lambda_E \to 0$. Muestra además que cuando $\kappa \neq 0$ entonces los puntos geométricos R para $\beta = \text{const}$ son tales que $\beta\Omega_{M_0} = \Omega_{\kappa_0}$ y por lo tanto

$$\Omega_{\Lambda_0} = 1 - (1 \mp \beta)\,. \tag{9}$$

En el caso en que $\kappa = 0$ entonces como $C \to \infty$ y $R_0 \to \infty$ se obtiene que $\beta \to 0$. Finalmente muestra el por qué cualquier punto en un diagrama Ω_{Λ_0} vs Ω_{M_0} fuera de aquellos que corresponden a $\kappa = 0$ constituyen una solución única a las ecuaciones de Friedmann debido a que para cada punto se obtiene Λ, C, κ, H_0, R_0 bien determinados.

(g) Considera un universo que se recolapsa en el futuro, i.e. $\dot{R}_\star = 0$ para algún tiempo

$t_\star$ en el futuro. Muestra que

$$\Omega_\Lambda x^3 + \Omega_\kappa x + \Omega_M = 0, \tag{10}$$

con $x = R_\star / R$. Cuenta el número de raíces de la ecuación (10) que ocurren para los seis casos cuando $\Omega_\Lambda \lesseqgtr 0$ mezclados con aquellos para los cuales $\Omega_\kappa \lesseqgtr 0$ y muestra que la condición $\Omega_\Lambda < 0$ garantiza un recolapso excepto cuando $\Omega_\Lambda > 0$ junto con $\Omega_\kappa < 0$. Calcula el discriminante D de la ecuación (10)

$$D = \left(\frac{\Omega_M}{2\Omega_\Lambda} \right)^2 + \left(\frac{\Omega_\kappa}{3\Omega_\Lambda} \right)^3, \tag{11}$$

y muestra que $D = 0$ para $\Lambda = \Lambda_E$, así como que la condición $\Lambda > \Lambda_E$ implica expansión por siempre.

En lo que resta de este ejercicio consideremos a un Universo dominado por materia solamente **sin** constante cosmológica.

(h) Utilizando la métrica de Robertson–Walker muestra que el elemento de tres–volumen $\mathrm{d}V$ correspondiente a la hipersuperficie $x^0 = \text{const}$ está dado por

$$\mathrm{d}V = R^3 \mathfrak{R}^2 \sin^2(r/\mathfrak{R}) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r. \tag{12}$$

(i) Considera una distribución cosmológica discreta de galaxias y asume que tienen un espectro en forma de potencias de tal manera que la luminosidad de la fuente es $L(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$. Muestra entonces que la densidad de flujo de la fuente $S(\nu_0)$ (es decir, la cantidad de energía recibida por unidad de tiempo, por unidad de área, por unidad de ancho de banda: $\mathrm{Wm^{-2}Hz^{-1}}$) está dada por

$$S(\nu_0) = \frac{L(\nu_0)}{4\pi D^2 (1 + z^2)^{1+\alpha}} \tag{13}$$

en donde la distancia efectiva $D = \mathfrak{R} \sin(r/\mathfrak{R})$ está dada por

$$D = \frac{2}{H_0 \Omega_{M_0}^2 (1+z)} \left\{ \Omega_{M_0} z + (\Omega_{M_0} - 2) \left[(\Omega_{M_0} z + 1)^{1/2} - 1 \right] \right\}. \tag{14}$$

(j) Sea N_0 el número de galaxias por unidad de volumen en la época presente. Muestra que si este número es constante a medida que el universo se expande, entonces el número de galaxias n por unidad de volumen por unidad de ángulo sólido está dado por:

$$dn = N_0 D^2 dr. \tag{15}$$

(k) Finalmente, calcula la intensidad de fondo $I(\nu_0)$ debida a esta distribución uniforme de galaxias y muestra que:

$$I(\nu_0) := \int S(\nu_0) dn = \frac{c}{H_0} \frac{L(\nu_0) N_0}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{(\Omega_{M_0} z + 1)^{1/2} (1+z)^{2+\alpha}}. \tag{16}$$

Verifica que para un universo Newtoniano está integral diverge y que no tiene ningún problema para un universo en expansión.

Este último resultado se conoce como la paradoja de Olbers pues este individuo se dio cuenta que en un universo isotrópico, Euclidiano e infinito, la radiación de fondo diverge.

(2) Consideremos el flujo de gas (acreción) que cae hacia una masa central m. La métrica del espacio tiempo producida por esta masa central es la métrica de Schwarzschild que en este caso toma la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (1 - 2m/r)\, dt - (1 - 2m/r)^{-1}\, dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{17}$$

Cuando las ecuaciones de la hidrodinámica se tienen que escribir en la presencia de un campo gravitacional significante hay que reemplazar algunas derivadas ordinarias en las ecuaciones de movimiento por derivadas covariantes. La ecuación de continuidad, la ecuación de Euler y la ecuación de conservación de la entropía se escriben respectivamente de la siguiente manera

$$n^\mu{}_{;\mu} = 0 \tag{18}$$

$$\omega u^\mu u_{\nu;\mu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu} - u_\nu u^\mu \frac{\partial p}{\partial x^\mu} \tag{19}$$

$$(\sigma u^\alpha)_{;\alpha} = 0. \tag{20}$$

Las dos últimas relaciones se obtienen de pedir que la divergencia generalizada del tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ sea nula, es decir,

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0. \tag{21}$$

(a) Muestra que a partir de la ecuación (21) se obtienen las ecuaciones (19) y (20). ¿Por qué razón es válida la ecuación (18)?

(b) Muestra que en el caso de un flujo de acreción estacionario ($\partial/\partial t = 0$), la ecuación (18) y la ecuación (21) implican que

$$\left(u^0\right)^2 = \frac{1}{1-2m/r}\left(1+\frac{\vartheta^2}{1-2m/r}\right), \tag{22}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 n\vartheta\right) = 0, \tag{23}$$

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\left(e+p\right)\vartheta\sqrt{1-2m/r+\vartheta^2}\right\} = 0. \tag{24}$$

$$\vartheta\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{dp}{dr}\frac{1-2m/r+\vartheta^2}{e+p} - \frac{m}{r^2}, \tag{25}$$

en donde $\vartheta := u^1 = dr/ds.$

(26)

(c) Muestra con lo anterior que

$$\frac{1}{n^2}\left(e+p\right)^2\left(1-2\frac{m}{r}+\vartheta^2\right) = \text{ const } := E. \tag{27}$$

$$n\frac{de}{dn} - e - p = 0. \tag{28}$$

Compara la ecuación (28) con la la primera ley de la termodinámica. ¿Qué diferencias y similitudes observas?

(d) Muestra que la velocidad ϑ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{r}\left\{2\Omega^2 - \frac{m}{r\left(1-2m/r+\vartheta^2\right)}\right\} + \frac{d\vartheta}{\vartheta}\left\{\Omega^2 - \frac{\vartheta^2}{1-2m/r+\vartheta^2}\right\} = 0, \tag{29}$$

en donde

$$\Omega^2 := \frac{d \ln (e+p)}{d \ln n} - 1. \tag{30}$$

Si alguno de los factores dentro de las llaves de la ecuación (29) se anula, entonces las soluciones son multivaluadas para r o ϑ. Para que el flujo en acreción alcance el centro es necesario que la velocidad se incremente monotonicamente hacia el centro de la configuración. Muestra entonces que los puntos críticos están dados por

$$\vartheta_c^2 = m/2r_c, \qquad \Omega_c^2 = \frac{\vartheta^2}{1 - 3\vartheta_c^2}. \tag{31}$$

Finalmente muestra que el punto crítico se encuentra a un radio mayor al radio de Schwarzschild.

(e) Considera que el gas en acreción es un gas politrópico cuya ecuación de estado es $p \propto n^\kappa \propto nT$.

(I) Supongamos que $\kappa = 4/3$ y que la temperatura T_∞ evaluada en infinito (en donde $\vartheta_\infty = 0$) es diferente de cero. Muestra entonces que

$$T_c \approx 2T_\infty, \qquad T_S \approx \frac{\sqrt{6}}{4} \left(\frac{m}{r_S} \right)^{2/3} T_\infty^{1/2}, \tag{32}$$

en donde T_S y T_c representan valores de la temperatura evaluados en el radio de Schwarzschild y en el punto crítico respectivamente. Para mostrar la segunda relación de la ecuación (32) asume que la temperatura T_S evaluada al radio de Schwarzschild es tal que $T_S \ll 1$.

(II) Considera que $\kappa = 5/3$ y muestra que

$$T_S \approx 0.3 \left(\frac{m}{r_S} \right)^{4/3}, \qquad u_c^4 \approx \frac{20}{27} T_\infty. \tag{33}$$

(3) Una estrella es un objeto gaseoso y suficiente masivo que puede considerarse (a primera aproximación) descrita por una métrica estática y esféricamente simétrica. De esta manera la métrica queda determinada por funciones $\lambda(r)$ y $\nu(r)$ que dependen de la

coordenada radial r (cf. métrica de Schwarzschild) de la siguiente manera

$$ds^2 = e^{\nu}\, dt^2 - e^{\lambda}\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2, \tag{34}$$

en donde $d\Omega^2 := \sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2$.

(I) Muestra que si $\dot{[\,]} := d[\,]/dr$, entonces las ecuaciones de Einstein, junto con la ecuación (34) implican que

$$-e^{-\lambda}\nu'/r - \left(e^{-\lambda - 1}\right)/r^2 = -8\pi p, \tag{35}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\nu''/2 - \nu'\lambda'/4 + \nu'^2/4 + \left(\nu' - \lambda'\right)/2r\right) = -8\pi p, \tag{36}$$

$$e^{-\lambda}\lambda'/r - \left(e^{-\lambda} - 1\right)/r^2 = 8\pi\rho. \tag{37}$$

(II) Debido a que la divergencia covariante del tensor de energía–momento $T^{\mu\nu}$ es nula, muestra que

$$\frac{\partial T^1_1}{\partial r} + \frac{1}{2}\nu'\left(T^1_1 - T^4_4\right) + \frac{1}{r}\left(T^1_1 - T^2_2\right) = -\frac{1}{2}\nu'\,(p + \rho) - p'. \tag{38}$$

Esta ecuación expresa de manera matemática el hecho de que la presión en la dirección radial es balanceada.

(III) Muestra que si la función $M(r)$ es tal que

$$M(r) := \frac{1}{2}\left[r\left(1 - e^{-\lambda}\right)\right], \tag{39}$$

entonces la ecuación (37) toma la forma

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \tag{40}$$

Compara esta ecuación con la ecuación correspondiente de balance hidrostático no–relativista. ¿Qué diferencias y similitudes encuentras entre estas dos ecuaciones? Explica el por qué la función $M(r)$ es proporcional a la masa contenida dentro del radio r y muestra que esta función tiende a la masa de la estrella contenida dentro de una esfera de radio r en el límite Newtoniano.

(IV) Con todo lo anterior muestra que la ecuación diferencial que satisface la presión $p(r)$ está dada por

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r}\frac{dp}{dr} = -\,(p + \rho)\left(4\pi p + \frac{M}{r^3}\right). \tag{41}$$

Esta ecuación puede resolverse con ayuda de la ecuación (40) y una ecuación de estado que relacione a la presión p con la densidad de energía ρ.

(V) Si consideramos que el objeto gaseoso es suficientemente masivo (i.e. $\gtrsim 100M_\odot$) entonces la presión está dominada por la presión de los fotones que el mismo produce, es decir,

$$p = \frac{1}{3}e, \tag{42}$$

donde e es la densidad de energía interna del sistema. La densidad de energía ρ está dada por la densidad de energía ρ_n de los nucleones del gas mas la densidad de energía e de los fotones, es decir,

$$\rho = \rho_n + e. \tag{43}$$

Estas energías están determinadas por

$$e = aT^4, \qquad \rho_n = a\tau T^3, \tag{44}$$

en donde T es la temperatura y a es la constante de densidad de radiación. El parámetro τ está relacionado a la entropía por barión de la estrella.
Redefine una nueva temperatura $\theta := T/\tau$ y unas unidades nuevas de tal forma que $8\pi m_n a\tau^4 = 1$, con m_n la masa promedio por nucleón y muestra que estas

ecuaciones se reducen a

$$\rho = a\tau^4 \left(t^4 + t^3\right), \tag{45}$$

$$p = a\tau^4 \left(\frac{1}{3}t^4\right), \tag{46}$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2}\left(t^4 + t^3\right) r^2, \tag{47}$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{r}{2}\left(\frac{3}{4} + t\right)\left(\frac{1}{3}t^4 + \frac{2m}{r^3}\right)\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \tag{48}$$

Estas ecuaciones diferenciales para $t(r)$ y $m(r)$ satisfacen las condiciones de frontera dadas por

$$m(r = 0) = 0, \qquad t(r = 0) = t_{\text{central}} \tag{49}$$

(VI) Muestra que la presión y la densidad de masa ρ satisfacen una ecuación tipo balance hidrostático dada por

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2}\rho. \tag{50}$$