Astrofísica Relativista
Examen

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>
http://www.astroscu.unam.mx/~sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Julio 03, 2006

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. Si utilizas notación de Einstein, hazlo de tal manera que los índices latinos tomen valores 1,2,3 y los griegos 0,1,2,3. En todos tus cálculos enfatiza la física y explica (¡dí no a las matemáticas sin sentido!). Puedes utilizar las ecuaciones de la hoja de información SIN demostrarlas, pero cuando las utilices, haz referencia a las mismas. No utilices un resultado que hayamos visto en clase SIN ANTES demostrarlo. Todas las preguntas tienen el mismo peso. Argumentos inteligentes, eficacia y orden en tus respuestas son la clave para obtener una buena calificación. El examen tiene una duración de cuatro horas. ¡Buena Suerte! [†‡]

(1) Considera un agujero negro de Schwarzschild. En este ejercicio y solo en este, se escogieron unidades de tal manera que la constante gravitacional $G = 1$ y la velocidad de la luz $c = 1$. En otras palabras, para este inciso se escogen unidades geometrodinámicas.

(a) Explica cual es su métrica y que significado tiene cada coordenada.

[†]El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación igual a cero en el curso y les calificaré con NA en el mismo.

[‡]Antes de comenzar a escribir tus respuestas, lee con calma el examen por completo. Esto ayudara a que tu mente se relaje y comience a profundizar en todas las preguntas.

(b) Utiliza las ecuaciones de Euler–Lagrange (o de cualquier otra forma, por ejemplo utilizando las ecuaciones de Hamilton–Jacobi) y muestra que el momento angular $h = r^2\dot{\varphi}$ y la energía $\xi = (1 - r/r_S)\dot{t}$ de una partícula de prueba son cantidades conservadas. Aquí r_S es el radio de Schwarzschild y $\dot{[]}$ es la derivada con respecto al tiempo propio τ.

(c) Muestra a partir del Lagrangiano para una partícula libre o utilizando las ecuaciones de Hamilton–Jacobi, o directamente de la ecuación geodésica, que la ecuación de energía (ecuación de movimiento para una partícula libre) obedece la relación

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{Mm}{r} - \frac{Mmh^2}{r^3} = \frac{1}{2}m(\xi^2 - 1). \tag{1}$$

Define los parámetros adimencionales:

$$\alpha := 2\,(M/h)^2\,, \qquad \epsilon := 2E_{tot}\,h^2/M^2, \qquad v := h^2u/M, \qquad u := 1/r, \tag{2}$$

en donde la energía total $E_{tot} := 2(\xi^2 - 1)$ y muestra que la ecuación (1) se simplifica como

$$\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 = \alpha v^3 - v^2 + \epsilon. \tag{3}$$

La ecuación (3) se puede llevar a una forma generalizada de cónicas definiendo la excentricidad e como $e^2 := 1 + \epsilon$. El problema es que la integración de la ecuación (3) es una integral elíptica (contrario a lo que sucede en el caso Newtoniano, en donde la integral es trigonométrica) y sus soluciones dependen de las funciones elípticas de Jacobi.

(d) La superficie de una estrella, que ocurre en $r = R$ es tal que su presión es igual a cero y debido a la simetría esférica de la misma entonces los puntos sobre la misma siguen geodésicas como tiempo que satisfacen $d\Omega = 0$. Muestra que la métrica de Schwarzschild evaluada en la superficie de la estrella es tal que

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\xi^2}\left(1 - \frac{r_S}{R}\right)^2\left(\frac{r_S}{R} - 1 + \xi^2\right). \tag{4}$$

Muestra además que cuando $t \to \infty$, entonces $\dot{R} \to 0$ y que $R \to r_S$. También

muestra que R alcanza un valor máximo igual a $r_S/\left(1-\xi^2\right)$. De aquí que el colapso pueda pensarse como que empieza con velocidad igual a cero al radio R_{max} y se aproxima de manera asintótica a R_S.

(e) Muestra que en términos de la derivada con respecto al tiempo propio τ la superficie de la estrella obedece

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{r_S}{R} - 1 + \xi^2\right) = \left(1-\xi^2\right)\left(\frac{R_{max}}{R} - 1\right). \tag{5}$$

De aquí muestra que la superficie de la estrella cae desde $R = R_{max}$ hasta $R = r_S$ en un tiempo propio finito y que de hecho la superficie de la estrella cae hasta $R = 0$ en un tiempo propio finito $\tau = \pi M/\left(1-\xi^2\right)^{3/2}$.

(f) En el caso de geodésicas radiales nulas la métrica de Schwarzschild es $c^2dt^2 = dr^2/\left(1-r_S/r\right)^2 := dr_\star^2$. Muestra que

$$r_\star = r + r_S \ln\left|\frac{r-r_S}{r_S}\right|. \tag{6}$$

La coordenada radial de Rogge-Wheeler $r_\star$ es válida para el rango $r_S \leq r < \infty$ con $-\infty < t < \infty$.

(g) Define la *coordenada radial nula hacia adentro* v como $v := ct + r_\star$, con $-\infty < v < \infty$, y muestra que la métrica toma la forma de la métrica de Eddington–Finkelstein dada por

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_S}{r}\right)dv^2 - 2drdv - r^2d\Omega^2. \tag{7}$$

Esta métrica está definida únicamente para $r > r_S$. Explica donde es singular esta métrica y con esto justifica el por que se puede hacer una continuación analítica de la misma para $r < r_S$.

(h) Muestra que los conos de luz se "voltean" hacia el origen de coordenadas a medida que $r \to r_S$ partiendo de $r > r_S$. Para esto muestra que

$$2drdv = -ds^2 + \left(1-\frac{r_S}{r}\right)dv^2 - r^2d\Omega^2 \leq 0, \tag{8}$$

para lineas de universo como–tiempo o nulas tales que $r < r_S$. De aquí muestra

que, como $dv > 0$ para lineas de universo dirigidas al futuro, entonces $dr \leq 0$ y con esto argumenta que los puntos $r < r_S$ están causalmente desconectados con respecto a los puntos $r > r_S$.

(2) Considera un universo homogéneo e isotrópico como el nuestro en donde el principio cosmológico es válido.

(a) Define y explica el corrimiento al rojo z aplicado a la recesión de galaxias en el universo. De aquí muestra la ley de Hubble $v = H_0 r$, donde v es la velocidad de recesión de una galaxia, r su distancia y H_0 es la constante de Hubble. ¿Por qué razón la constante de Hubble no es una "verdadera" constante?

(b) Explica que es el factor de escala $R(t)$ y muestra que la coordenada radial $\rho(t) = R(t)r$. Muestra además que el radio de curvatura $R_c(t) = \Re R(t)$, donde $\Re$ es el radio de curvatura del universo en la época presente.

(c) Utilizando la métrica de Robertson–Walker (20), explica (no lo demuestres matemáticamente en extenso) como se obtienen las ecuaciones de Friedmann (21), (22) y (23). ¿Qué significado geometrodinámico tiene la función escalar $\Lambda(x^\mu)$. ¿Por qué razón fue introducida en cosmología y que efecto tiene esta directamente sobre la curvatura del universo? Explica el significado de la densidad ρ y su relación completa con la densidad de energía e. ¿Por qué razón utilizamos ρ en vez de e?

(d) Muestra utilizando las ecuaciones de Friedmann que la expansión del universo se lleva acabo de manera adiabática de acuerdo a la primera ley de la termodinámica.

(e) Muestra que el corrimiento al rojo z y el factor de escala $R(t)$ están relacionados mediante la fórmula

$$1 + z = \frac{1}{R(t)}. \tag{9}$$

Muestra que la ley de Hubble en términos de distancias propias $\rho(t)$ está dada por $d\rho/dt = H_0\rho$ y que por lo tanto la constante de Hubble satisface la relación

$$H_0 = \left.\frac{\dot{R}}{R}\right|_{t_0} = \left.\dot{R}\right|_{t_0}. \tag{10}$$

(f) Muestra que en un universo dominado por materia, i.e. modelo de polvo, la densidad crítica ρ_c para mantener cerrado al mismo está dada por

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \tag{11}$$

¿Qué sucede si la densidad del universo ρ_0 hoy en día es mayor a esta densidad crítica? Justifica tu respuesta a esto de manera matemática.

(g) Considera un universo en donde hay constante cosmológica, radiación y materia. Define el parámetro de densidad $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ en donde el subíndice i se refiere a materia (M), radiación (R), curvatura (κ) y constante cosmológica (Λ). Para cada caso, este parámetro de densidad está definido respectivamente por

$$\Omega_{M_0} := \frac{8\pi G\rho_{M_0}}{3H_0^2}, \qquad \Omega_{R_0} := \frac{8\pi G\rho_{R_0}}{3H_0^2}, \tag{12}$$

$$\Omega_{\kappa_0} := -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2} = -\frac{c^2\kappa}{H_0^2}, \qquad \Omega_{\Lambda_0} := \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \tag{13}$$

Muestra con esto que la constante de Hubble $H(t)$ definida para cualquier tiempo cósmico t, i.e. la velocidad de expansión del universo, satisface la relación

$$H^2(R) = H_0^2\left\{\frac{\Omega_{R_0}}{R^4} + \frac{\Omega_{M_0}}{R^3} + \frac{\Omega_{\kappa_0}}{R^2} + \Omega_{\Lambda_0}\right\}. \tag{14}$$

Finalmente muestra con esto que

$$\Omega_{M_0} + \Omega_{\kappa_0} + \Omega_{\Lambda_0} = 1. \tag{15}$$

(h) Muestra que si a *cualquier* época en el universo se definen los parámetros

$$\Omega_M := \frac{8\pi G\rho}{3H^2}, \quad \Omega_\kappa := -\frac{\kappa c^2}{R^2H^2}, \quad \Omega_R := \frac{8\pi G\rho}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H^2}, \tag{16}$$

entonces se cumple la relación

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda = 1, \tag{17}$$

para cualquier tiempo cósmico t. Muestra además que si se conoce H_0 de manera

observacional, entonces se conoce directamente Λ y ρ_0 de las observaciones de Ω_{Λ_0} y Ω_{κ_0}. Si $\kappa \neq 0$ muestra entonces que el valor de R_0 es entonces conocido. ¿Qué significado físico tiene esta última condición?

(i) Muestra que el espectro de la radiación cósmica de fondo en microondas que es de tipo cuerpo negro permanece como tal a medida que el universo se expande. Demuestra también que la densidad de energía e y la temperatura T de los fotones de la radiación cósmica de fondo en microondas escalan con el factor de escala de acuerdo a las siguientes relaciones

$$e \propto R^{-4}, \qquad \text{y} \qquad T \propto R^{-1}. \tag{18}$$

(j) Explica brevemente que es la energía oscura y como afecta la evolución del universo. ¿Por qué razón observacional fue propuesta? ¿Cuál es su ecuación de estado? También describe que es la materia oscura bariónica y no–bariónica. ¿Por qué razón observacional se cree que exista materia oscura en el universo? ¿Cómo afecta la existencia de materia oscura no–bariónica en el universo a la dinámica del mismo? Si no existe materia oscura en el universo, ¿Cómo pueden explicarse estas últimas observaciones?

(k) Explica por qué razón se ha propuesto a lo largo del tiempo explicar modelos inflacionarios, de materia oscura y de expansión acelerada (energía oscura) utilizando teorias alternativas, como las teorías métricas $f(R) \propto R^n$, en donde n es un entero distinto de la unidad y R el escalar de Ricci. Menciona brevemente que es MOND (Modified Newtonian Dynamics) y por qué razón fue introducida por Milgrom como una alternativa a la materia oscura no–barionica.

(l) Explica el por qué una constante cosmológica es equivalente (teorema de Zeldovich) a un universo de polvo con presión de vacio tal que

$$p = -\rho c^2. \tag{19}$$

Muestra utilizando la primera ley de la termodinámica (o de alguna otra manera, por ejemplo con teoría de campos cuántica) que el vacio cosmológico es capaz de generar una presión negativa dada por la ecuación (19)

(3) Escribe un ensayo sobre relatividad general. Utiliza las matemáticas necesarias (pero no muchas) y física, mucha física. El escrito debe por lo menos contener lo siguiente. Muestra exactamente bajo que condiciones uno espera que los efectos de la relatividad especial sean observables en presencia de campos gravitacionales. Explica el principio de equivalencia y la equivalencia entre masa inercial y masa gravitacional. Argumenta por qué el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ corresponde a una cuadrática simétrica cuyo determinante es negativo y su componente temporal g_{00} es positiva y toma el valor $g_{00} = 1+2\phi/c^2$. Muestra el por qué es imposible (de manera general) sincronizar relojes en relatividad general y menciona la relación que existe entre el tensor métrico en tres dimensiones γ_{kl} y el tensor $g_{\mu\nu}$. Describe el significado de los símbolos de Christoffel y su importancia en el estudio de espacios curvos. ¿Qué significado tienen en relatividad general estos mismos? Explica el significado de una derivada covariante y el porque es necesaria su introducción en el estudio de espacios curvos. ¿Cómo se relaciona esta misma con la derivada ordinaria y por qué razón el tensor métrico es constante a diferenciación covariante? Menciona la importancia del tensor de Riemann en espacios curvos y explica la importancia del tensor y escalar de Ricci. Utilizando principios variacionales, explica y demuestra la ecuación geodésica, así como las ecuaciones de campo de Einstein. ¿Cuál es el significado geometrodinámico de las mismas? Mediante el uso de la ecuación de Poisson argumenta como las ecuaciones de Einstein pueden ser encontradas. Explica las caracteristicas de las ecuaciones de Einstein (con y sin constante cosmológica). ¿Por qué se introdujo la constante cosmológica? ¿Qué relación tiene la misma con el universo que nos rodea actualmente, así como en el pasado? Describe las propiedades matemáticas de las ecuaciones de campo como la superposición y el número de ecuaciones independientes utilizando sobre todo argumentos físicos. Finalmente comenta el por qué es posible modificar la gravitación mediante argumentos sobre la acción de curvatura. ¿Qué experimentos astronómicos nos han llevado a postular esta modificación?

Hoja de información[†]

Métrica de Robertson–Walker:

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left\{dr^2 + \mathfrak{R}^2\sin^2(r/\mathfrak{R})d\Omega^2\right\}$$
$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{dx^2}{1-kx^2} + x^2d\Omega^2\right\}, \tag{20}$$

Ecuaciones de Friedmann:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0. \tag{21}$$
$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi GR\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda R, \tag{22}$$
$$\dot{R}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{3}\Lambda R^2. \tag{23}$$

Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{24}$$

Métrica de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist:

$$\begin{aligned} ds^2 =& \frac{(\Delta - a^2\sin^2\theta)dt^2}{\Sigma}c^2dt^2 - 2a\sin^2\theta\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}dtd\varphi - \\ &- \frac{(r^2+a^2) - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2, \end{aligned} \tag{25}$$

en donde

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{26}$$
$$\Delta = r^2 + a^2 - 2GMr/c^2. \tag{27}$$

[†]Puedes utilizar cualquier ecuación en esta página sin demostrarla.