Astrofísica Relativista
Examen–tarea

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>
http://www.astroscu.unam.mx/~sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Julio 03, 2006

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. En todos tus cálculos enfatiza la física y justifica extensamente todo lo que hagas. En particular, si utilizas tablas de integrales para algo que de verdad no puedes resolver escribe la referencia. En todo el examen índices griegos toman valores 0,1,2,3 y los índices latinos toman valores 1,2,3. Las unidades han sido escogidas de tal manera que $G = c = 1$, i.e. se ha tomado un sistema de unidades *geometrodinámico*. Argumentos inteligentes, eficacia y orden en tus respuestas son la clave para obtener una buena calificación. Este examen debe ser entregado personalmente a mas tardar a las 12.00hrs del jueves 7 de julio del 2006 en la oficina 249 de Sinhue Haro en el Instituto de Astronomía[†]. ¡Buena Suerte!

(1) Considera un plasma astrofísico que se mueve de manera relativista. Al igual que en hidrodinámica Newtoniana, es posible que existan ciertas discontinuidades en el flujo del plasma.

(I) Muestra que si x es la dirección ortogonal a la superficie de discontinuidad la cual corresponde a una onda de choque, entonces la ecuación de continuidad

[†] El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación de CERO en TODO el curso y les calificaré con NA en el mismo

y la nulidad de la divergencia del tensor de energía–momento implican que los flujos de número de partículas, momento y energía sean conservados, es decir,

$$[nu^x] = 0, \qquad [T^{xx}] = [w(u^x)^2 + p] = 0, \qquad [T^{0x}] = [wu^0u^x] = 0. \tag{1}$$

Los corchetes $[a]$ aplicados a la cantidad física a significan $[a] := a_2 - a_1$, y los subíndices $1, 2$ se refieren a flujo pre y post–choque respectivamente. Utilizando la ecuación (1) muestra que en el sistema de referencia de la onda de choque

$$\beta_1\gamma_1/V_1 = \beta_2\gamma_2/V_2, \tag{2}$$

$$w_1\beta_1^2\gamma_1^2 + p_1 = w_2\beta_2^2\gamma_2^2 + p_2, \tag{3}$$

$$w_1\beta_1\gamma_1^2 = w_2\beta_2\gamma_2^2, \tag{4}$$

con $V_{1,2} := 1/n_{1,2}$ los volúmenes por partícula y $\gamma_{1,2}$ los correspondientes factores de Lorentz para las velocidades $\beta_{1,2}$.

Las ecuaciones anteriores se conocen como las condiciones de salto de Taub. Lo que ahora sigue es calcular estas condiciones de salto en un sistema de referencia arbitrario.

(II) Muestra que para flujo unidimensional la nulidad de la divergencia del tensor de energía momento implica la conservación de energía ($\partial T^{0\alpha}/\partial x^\alpha = 0$) y la ecuación de conservación de momento ($\partial T^{1\alpha}/\partial x^\alpha = 0$), es decir

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\beta\frac{p+\epsilon+\rho}{1-\beta^2}\right\} + \frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^k\frac{p+\beta^2(\epsilon+\rho)}{1-\beta^2}\right\} - \frac{kp}{r} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\epsilon+\beta^2 p+\rho[1-\sqrt{1-\beta^2}]}{1-\beta^2}\right\} + \frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^k\beta\frac{p+\epsilon+\rho[1-\sqrt{1-\beta^2}]}{1-\beta^2}\right\} = 0, \tag{6}$$

donde la densidad de masa $\rho := mn$ y $e := \rho + \epsilon$, con ϵ la densidad de energía interna. Muestra también que la ecuación de continuidad puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^k}\left\{r^k\beta\frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\} = 0, \tag{7}$$

con $k = 0, 1, 2$ dependiendo si la simetría del problema es plana, cilíndrica o esférica.

Las tres ecuaciones anteriores pueden escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(r^k A\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^k B\right) + C = 0, \tag{8}$$

con A y B funciones que dependen de la coordenada r y el tiempo t.

(III) Integra la ecuación (8) sobre la hipersuperficie Φ que se muestra en la figura 1 y muestra con ayuda del teorema de Stokes que

$$\oint_{\partial\Phi} \left(r^k A \, dr - r^k B \, d\tau\right) + \int\!\!\int_{\Phi} C \, d\tau dr = 0. \tag{9}$$

De aquí muestra que como dr y $d\tau$ son cantidades de primer orden, entonces la ecuación sobre la hipersuperficie ϕ es despreciable en comparación con la de su frontera $\partial\phi$. Demuestra además que cuando el volumen de integración tiende a cero entonces la coordenada r permanece constante a lo largo de cada segmento de integración y por lo tanto

$$\oint_{\partial\Phi} \left(-A \, dr + B \, d\tau\right) \approx -\left[A_1(r_1 - r_0) - A_2(r_1 - r_0)\right] + B_1(\tau_1 - \tau_0) - B_2(\tau_1 - \tau_0) = 0. \tag{10}$$

Con esto muestra entonces que

$$\beta_s[A] = [B], \tag{11}$$

en donde la velocidad de la onda de choque $\beta_s := (r_1 - r_0) / (t_1 - t_0)$ y como antes $[\zeta] := \zeta_2 - \zeta_1$. Muestra con todo esto que las condiciones de salto de Taub

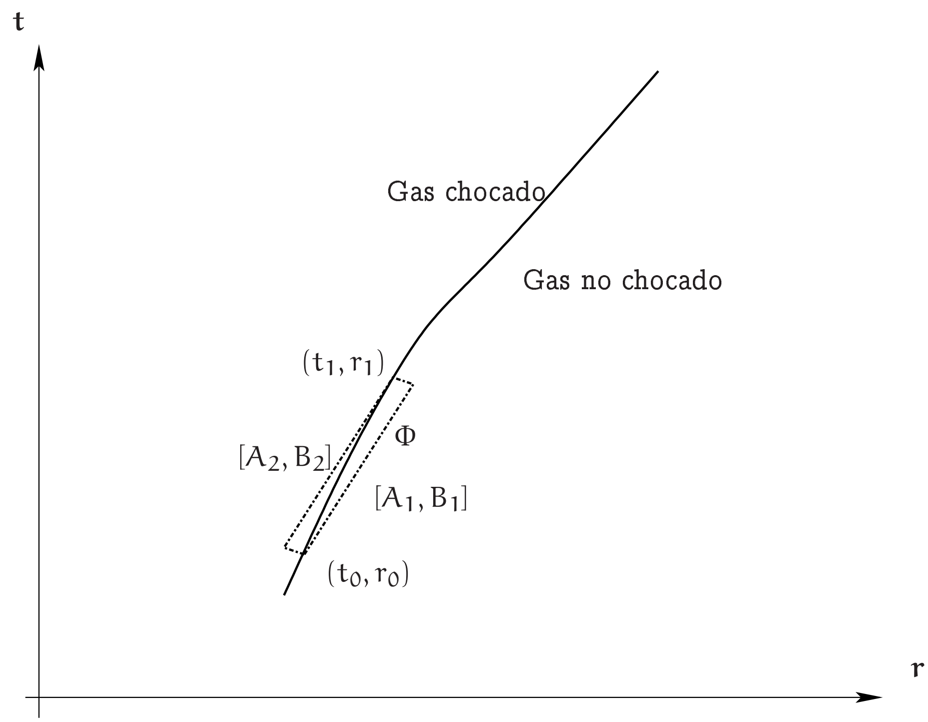

Figura 1: La figura muestra la línea de universo de una onda de choque. La hipersuperficie ϕ es elegida de tal forma que su espesor y su altura tiendan a cero para poder relacionar los lados 1 y 2 del flujo antes y después del choque.

escritas en cualquier sistema de referencia están entonces dadas por

$$\beta_s \left[\beta \frac{p+\epsilon+\rho}{1-\beta^2} \right] = \left[\frac{p+\beta^2(\epsilon+\rho)}{1-\beta^2} \right], \tag{12}$$

$$\beta_s \left[\frac{\epsilon+\beta^2 p+\rho\left[1-\sqrt{1-\beta^2}\right]}{1-\beta^2} \right] = \left[\beta \frac{p+\epsilon+\rho\left[1-\sqrt{1-\beta^2}\right]}{1-\beta^2} \right], \tag{13}$$

$$\beta_s \left[\frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] = \left[\beta \frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \right]. \tag{14}$$

(IV) De ahora en adelante escogeremos un sistema de referencia en el cual el gas pre–choque esté en reposo y por lo tanto $\beta_1 = 0$. Escribe explícitamente las relaciones de Taub en este sistema de referencia y muestra que

$$\beta_s - \beta_2 = \frac{\beta_2\left(1-(\beta_2)^2\right)}{(\beta_2)^2 p_2 + \epsilon_2 + \rho_2\left\{1-\sqrt{(1-(\beta_2)^2)}\right\} - \epsilon_1\left(1-(\beta_2)^2\right)}, \tag{15}$$

$$\epsilon_2 = \rho_2\{\gamma_2 - 1\} + \frac{\beta_s\epsilon_1 + \beta_2 p_1}{\beta_s - \beta_2}, \tag{16}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\beta_s}{\beta_s-\beta_2}\frac{1}{\gamma_2} = \gamma_2\left\{\frac{p_2+\epsilon_2}{p_2+\epsilon_1}\right\} + \left\{\frac{\rho_2}{p_2+\epsilon_1}\left(\gamma_2-1\right)\right\}. \tag{17}$$

Con esto muestra que la condición de brinco para la densidad de energía está dada por

$$e_2 = \rho_2\gamma_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\gamma_2\epsilon_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}p_1\frac{\beta_2}{\beta_s}\gamma_2, \tag{18}$$

y por tanto la energía por unidad de masa inmediatamente después del choque es entonces

$$\frac{e_2}{\rho_2} = \frac{\gamma_2}{\rho_1}\left\{e_1 + p_1\frac{\beta_2}{\beta_s}\right\}. \tag{19}$$

(V) En lo subsecuente trabajaremos únicamente con una onda de choque fuerte, para la cual las cantidades p_1 y ϵ_1 son pequeñas en comparación con p_2 y e_2. Muestra que para este caso

$$\epsilon_2 = \rho_2 c^2\left(\gamma_2 - 1\right). \tag{20}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{p_2}\{\gamma_2(p_2+\epsilon_2)+\epsilon_2\}. \tag{21}$$

Además evalúa estas relaciones para un gas politrópico tal que $p = (\kappa - 1)\epsilon$ y encuentra que

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \gamma_2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{1}{\kappa - 1}, \tag{22}$$

$$\Gamma_s = \frac{\gamma_2}{\sqrt{1 - 2(\kappa - 1)/\kappa}}, \tag{23}$$

En donde el Γ_s representa el factor de Lorentz de la onda de choque y γ el del flujo pre–choque. ¡¡¡Nota que la densidad post-choque no tiende a una constante en el caso de choques fuertes, como sucede en el caso Newtoniano!!!

De ahora en adelante considera que $\kappa = 4/3$ y que el flujo es altamente relativista. Considera también una onda de choque esférica de tal manera que esta haya sido generada por una explosión altamente energética en el origen al tiempo $t = 0$.

(VII) Muestra que

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{2}\Gamma_s^2 \gg 1. \tag{24}$$

Esto indica que en lo sucesivo el análisis se hará aproximadamente a $O(\Gamma_s^2)$. También demuestra que

$$\gamma_2 n_2 = 2\Gamma_s^2 n_1, \qquad e_2 = \frac{n_2}{n_1}\gamma_2 w_1 = 2\Gamma_s^2 w_1, \qquad p_2 = \frac{2}{3}\Gamma_s^2 w_1. \tag{25}$$

(VIII) Muestra que las ecuaciones de conservación de energía, de momento y de entropía en el caso de simetría esférica pueden escribirse como:

$$\frac{d}{dt}\left(p\gamma^4\right) = \gamma\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{26}$$

$$\frac{d}{dt}\ln\left(p^3\gamma^4\right) = -\frac{4}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\beta\right), \tag{27}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{n^{4/3}}\right) = 0. \tag{28}$$

A partir de ahora, para simplificar notación omitiremos subíndices cuando las cantidades se refieran al gas chocado detrás de la onda de choque. La velocidad de la onda de choque está dada por $\dot{R} = \beta_s := \sqrt{1 - 1/\Gamma^2}$. Supongamos ahora que

$$\Gamma^2 = \frac{A}{t^m}, \tag{29}$$

(vii) Muestra que a $O(\Gamma^2)$ se cumple la siguiente relación:

$$\frac{r}{R} = 1 + \frac{1}{2\Gamma^2(m+1)}. \tag{30}$$

(viii) Define ahora la variable de similaridad ϕ mediante la relación:

$$\frac{r}{R} = 1 + \frac{\phi}{2\Gamma^2(m+1)}. \tag{31}$$

y muestra que

$$\phi = \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2(m+1)\Gamma^2, \tag{32}$$

(ix) Por comodidad define otra variable de similaridad χ como

$$\chi = 1 + \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2(m+1)\Gamma^2. \tag{33}$$

Muestra con esto que las condiciones de frontera (24) y (25) toman la forma

$$p = \frac{3}{2}\omega_1 \Gamma^2 f(\chi), \qquad n\gamma = 2n_1\Gamma^2 h(\chi), \qquad \gamma^2 = \frac{1}{2}\Gamma^2 g(\chi). \tag{34}$$

Además muestra que como

$$\frac{\partial}{\partial \ln t} = -m\frac{\partial}{\ln \Gamma^2} + \left[(m+1)(2\Gamma^2 - \chi) + 1\right] \frac{\partial}{\partial \chi}, \tag{35}$$

$$t\frac{\partial}{\partial r} = -\left[1 + 2(m+1)\Gamma^2\right] \frac{\partial}{\partial \chi}, \tag{36}$$

$$\frac{d}{d \ln t} = -m\frac{\partial}{\partial \ln \Gamma^2} + (m+1)\left(\frac{2}{g} - \chi\right) \frac{\partial}{\partial \chi}. \tag{37}$$

Entonces las ecuaciones (26), (27) y (28) se obtiene que

$$\frac{1}{g}\frac{d\ln f}{\ln\chi} = \frac{8(m-1)-(m-4)g\chi}{(m+1)\{4-8g\chi+g^2\chi^2\}}, \tag{38}$$

$$\frac{1}{g}\frac{d\ln g}{\ln\chi} = \frac{(7m-4)-(m-2)g\chi}{(m+1)\{4-8g\chi+g^2\chi^2\}}, \tag{39}$$

$$\frac{1}{g}\frac{d\ln h}{\ln\chi} = \frac{2(9m-8)-2(5m-6)g\chi+(m-2)g^2\chi^2}{(m+1)\{4-8g\chi+g^2\chi^2\}(2-g\chi)}. \tag{40}$$

Gracias a buscar soluciones autosimilares al problema de una onda de choque explosiva relativista es posible llevar el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias las cuales pueden resolverse fácilmente siempre y cuando se conozca el índice de similaridad m. Por argumentos energéticos este mismo resulta ser $m = 3$ en este caso en particular.

(2) Consideremos el flujo de gas (acreción) que cae hacia una masa central m. La métrica del espacio tiempo producida por esta masa central es la métrica de Schwarzschild que en este caso toma la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (1-2m/r)\,dt - (1-2m/r)^{-1}\,dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{41}$$

Cuando las ecuaciones de la hidrodinámica se tienen que escribir en la presencia de un campo gravitacional significante hay que reemplazar algunas derivadas ordinarias en las ecuaciones de movimiento por derivadas covariantes. La ecuación de continuidad, la ecuación de Euler y la ecuación de conservación de la entropía se escriben respectivamente de la siguiente manera

$$n^\mu{}_{;\mu} = 0 \tag{42}$$

$$\omega u^\mu u_{\nu;\mu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu} - u_\nu u^\mu \frac{\partial p}{\partial x^\mu} \tag{43}$$

$$(\sigma u^\alpha)_{;\alpha} = 0. \tag{44}$$

Las dos últimas relaciones se obtienen de pedir que la divergencia generalizada del tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ sea nula, es decir,

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0. \tag{45}$$

(a) Muestra que a partir de la ecuación (45) se obtienen las ecuaciones (43) y (44). ¿Por qué razón es válida la ecuación (42)?

(b) Muestra que en el caso de un flujo de acreción estacionario ($\partial/\partial t = 0$), la ecuación (42) y la ecuación (45) implican que

$$\left(u^0\right)^2 = \frac{1}{1-2m/r}\left(1 + \frac{\vartheta^2}{1-2m/r}\right), \tag{46}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 n \vartheta\right) = 0, \tag{47}$$

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\,(e+p)\,\vartheta\sqrt{1-2m/r+\vartheta^2}\right\} = 0. \tag{48}$$

$$\vartheta\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{dp}{dr}\frac{1-2m/r+\vartheta^2}{e+p} - \frac{m}{r^2}, \tag{49}$$

en donde $\vartheta := u^1 = dr/ds$.

(50)

(c) Muestra con lo anterior que

$$\frac{1}{n^2}\,(e+p)^2\left(1-2\frac{m}{r}+\vartheta^2\right) = \text{ const } := E. \tag{51}$$

$$n\frac{de}{dn} - e - p = 0. \tag{52}$$

Compara la ecuación (52) con la la primera ley de la termodinámica. ¿Qué diferencias y similitudes observas?

(d) Muestra que la velocidad ϑ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{r}\left\{2\Omega^2 - \frac{m}{r\,(1-2m/r+\vartheta^2)}\right\} + \frac{d\vartheta}{\vartheta}\left\{\Omega^2 - \frac{\vartheta^2}{1-2m/r+\vartheta^2}\right\} = 0, \tag{53}$$

en donde

$$\Omega^2 := \frac{d\ln(e+p)}{d\ln n} - 1. \tag{54}$$

Si alguno de los factores dentro de las llaves de la ecuación (53) se anula, entonces las soluciones son multivaluadas para r o ϑ. Para que el flujo en acreción alcance el centro es necesario que la velocidad se incremente monotonicamente hacia el centro de la configuración. Muestra entonces que los puntos críticos están dados por

$$\vartheta_c^2 = m/2r_c, \qquad \Omega_c^2 = \frac{\vartheta^2}{1 - 3\vartheta_c^2}. \tag{55}$$

Finalmente muestra que el punto crítico se encuentra a un radio mayor al radio de Schwarzschild.

(e) Considera que el gas en acreción es un gas politrópico cuya ecuación de estado es $p \propto n^\kappa \propto nT$.

(I) Supongamos que $\kappa = 4/3$ y que la temperatura T_∞ evaluada en infinito (en donde $\vartheta_\infty = 0$) es diferente de cero. Muestra entonces que

$$T_c \approx 2T_\infty, \qquad T_S \approx \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{m}{r_S}\right)^{2/3} T_\infty^{1/2}, \tag{56}$$

en donde T_S y T_c representan valores de la temperatura evaluados en el radio de Schwarzschild y en el punto crítico respectivamente. Para mostrar la segunda relación de la ecuación (56) asume que la temperatura T_S evaluada al radio de Schwarzschild es tal que $T_S \ll 1$.

(II) Considera que $\kappa = 5/3$ y muestra que

$$T_S \approx 0.3\left(\frac{m}{r_S}\right)^{4/3}, \qquad u_c^4 \approx \frac{20}{27} T_\infty. \tag{57}$$

(3) Considera un universo como en el que vivimos actualmente y por lo tanto el principio cosmológico es válido. En este ejercicio las unidades se escogen de tal manera que $8\pi G = c = 1$. Imagina que la acción S del campo gravitacional está dada por

$$S = -m\int ds - \int f(R)\sqrt{-g}\,d\Omega + \int \Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega, \tag{58}$$

En donde Λ está relacionada con el tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ mediante la relación

$$\frac{1}{2}T_{\mu\nu} = \frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\left(\partial g^{\mu\nu}/\partial x^{\alpha}\right)}, \tag{59}$$

y la función $f(R)$ es una función arbitraria del escalar de Ricci R.

(I) Explica el por qué la ecuación (59) es la forma más general de escribir la acción para un campo gravitacional.

Las ecuaciones de campo que se obtienen directamente de la variación δS en la relación (59) están dadas por (¡NO intentes demostrarlas para el examen! pero diviertete en vacaciones haciéndolo...)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T^{\mathrm{curv}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu}/f'(R), \tag{60}$$

en donde el tensor $T^{\mathrm{mat}}_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía–momento estándard asociado a la materia y el tensor (de energía–momento) $T^{\mathrm{curv}}_{\alpha\beta}$ asociado a curvatura está definido por

$$T^{\mathrm{curv}}_{\alpha\beta} := \frac{1}{f'(R)}\left\{\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left[f(R) - Rf'(R)\right] + f'(R)^{;\mu\nu}\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\right)\right\}, \tag{61}$$

Nota que la ecuación (60) converge a las ecuaciones de Einstein cuando $f(R) = R$. Utilizando la métrica de Robertson–Walker en las ecuaciones de campo se obtienen las ecuaciones de Friedmann modificadas para $f(R)$:

$$\dot{\rho}_{\mathrm{tot}} + 3H(\rho_{\mathrm{tot}} + p_{\mathrm{tot}}) = 0, \tag{62}$$

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3}\left[\rho_{\mathrm{curv}} + \frac{\rho_m}{f'(R)}\right], \tag{63}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} = -\left(p_{\mathrm{curv}} + p_m\right), \tag{64}$$

en donde $a(t)$ representa el factor de escala, $H(t)$ la constante de Hubble, $\dot{[]} := d/dt$,

$\rho_{tot} := \rho_{mat}/f'(R) + \rho_{curv}$ y $p_{tot} := p_{mat}/f'(R) + p_{curv}$ con

$$\rho_{curv} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} \left[f(R) - Rf'(R) \right] - 3H\dot{R}f''(R) \right\}, \tag{65}$$

$$p_{curv} = w_{curv}\rho_{curv}, \tag{66}$$

$$w_{curv} = -1 + \frac{\ddot{R}f''(R) + \dot{R}\left[\dot{R}f'''(R) - Hf''(R) \right]}{\left[f(R) - Rf'(R) \right]/2 - 3H\dot{R}f''(R)}. \tag{67}$$

Nota que de esta manera se puede pensar al universo como un fluido asociado a materia bariónica y otro asociado a efectos de curvatura. Es natural suponer que ambos fluidos no interaccionan entre si. El insertar la métrica de Robertson–Walker en la ecuación (60) impone también una condición sobre el escalar de curvatura R en función del factor de escala dada por

$$R = -6 \left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2} \right). \tag{68}$$

(II) Muestra que en la época presente, como la curvatura $\kappa = 0$ y el universo es de polvo, i.e. $p_{mat} = 0$, entonces

$$\dot{\rho}_{curv} + 3H(1 + w_{curv})\rho_{curv} = -\frac{1}{f'(R)}(\dot{\rho}_m + 3H\rho_m) - \rho_m \frac{df'(R)}{dt}. \tag{69}$$

De aquí y utilizando la conservación de masa muestra que

$$\dot{\rho}_{curv} + 3H(1 + w_{curv})\rho_{curv} = 3H_0^2\Omega_M(1+z)^3 \times \frac{\dot{R}f''(R)}{[f'(R)]^2}. \tag{70}$$

en donde Ω_M es el parámetro de densidad de masa (cf. examen de clase).

(III) Utilizando las ecuaciones (63) y (64) muestra que

$$\dot{H} + \frac{1}{2}\left[\frac{\rho_m}{f'(R)} + (1 + w_{curv})\rho_{curv} \right] = 0,$$

para así obtener

$$\dot{H} = -\frac{1}{2f'(R)} \left\{ 3H_0^2\Omega_M(1+z)^3 + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}\left[\dot{R}f'''(R) - Hf''(R) \right] \right\}. \tag{71}$$

(IV) Muestra que $d/dt = -(1+z)Hd/dz$ para así concluir que la ecuación (71) toma la forma

$$\mathcal{H}_3(z)\frac{d^3f}{dz^3} + \mathcal{H}_2(z)\frac{d^2f}{dz^2} + \mathcal{H}_1(z)\frac{df}{dz} = -3H_0^2\Omega_M(1+z)^3 \tag{72}$$

con:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 =& \dot{R}^2\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-4}\left[3\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-1}\left(\frac{d^2R}{dz^2}\right)^2 - \frac{d^3R}{dz^3}\right] - \left(\ddot{R}-\dot{R}H\right)\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-3}\frac{d^2R}{dz^2} - \\ & -2(1+z)H\frac{dH}{dz}\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-1},\end{aligned} \tag{73}$$

$$\mathcal{H}_2 = \left(\ddot{R}-\dot{R}H\right)\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-2} - 3\dot{R}^2\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-4}\frac{d^2R}{dz^2}, \tag{74}$$

$$\mathcal{H}_3 = \dot{R}^2\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-3}. \tag{75}$$

(v) Muestra con ayuda de la ecuación (68) que

$$\frac{dR}{dz} = -6\left\{-(1+z)\left(\frac{dH}{dz}\right)^2 + H\left[3\frac{dH}{dz} - (1+z)\frac{d^2H}{dz^2}\right]\right\}, \tag{76}$$

$$\ddot{R} - \dot{R}H = 6(1+z)H^2\left\{3(1+z)^2\frac{dH}{dz}\frac{d^2H}{dz^2} + H\left[(1+z)^2\frac{d^3H}{dz^3} - 6\frac{dH}{dz}\right]\right\}. \tag{77}$$

Para conocer el valor de la función $f(R)$ cosmológica que funciona como energía oscura, basta con sustituir las ecuaciones (76)-(77) en la ecuación (72) para así obtener una ecuación diferencial para $f(R(z))$ en función de la forma observacional que tenga la constante de Hubble $H(z)$.