Astrofísica Relativista
Examen–tarea

Sergio Mendoza <sergio@mendozza.org>
http://www.mendozza.org/sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Enero 18, 2006

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. Forzosamente debes contestar la pregunta número (4). En todos tus cálculos enfatiza la física y justifica extensamente todo lo que hagas. En particular, si utilizas tablas de integrales para algo que de verdad no puedes resolver escribe la referencia. En todo el examen índices griegos toman valores 0,1,2,3 y los índices latinos toman valores 1,2,3. Las unidades han sido escogidas de tal manera que $G = c = 1$, i.e. se ha tomado un sistema de unidades *geometrodinámico*. Argumentos inteligentes, eficacia y orden en tus respuestas son la clave para obtener una buena calificación. Este examen debe ser entregado personalmente a mas tardar a las 12.00hrs del lunes 21 de enero del 2008 en mi oficina, la número 202 del Instituto de Astronomía[†]. ¡Buena Suerte!

(1) La métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker está dada por

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 d\Omega^2 \right\}, \tag{1}$$

[†] El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación de CERO en TODO el curso y les calificaré con NA en el mismo

(a) Muestra que haciendo los cambios $\kappa\chi^2 \to \chi^2$ y $(R^2/\kappa) \to R$ la métrica se puede escribir como la ecuación (1) pero con la condición de que que en estas nuevas coordenadas, la curvatura solamente toma valores $\kappa = 0, \pm 1$ (universo plano, cerrado y abierto respectivamente) y que el factor de escala en la época presente $R(t_0) = \mathfrak{R}$.

De ahora en adelante consideraremos un universo dominado por cualquier forma de polvo (materia bariónica, materia oscura, etc.) y que contiene una constante cosmológica Λ asociada a su dinámica. Esto es como el universo en donde vivimos en la época presente.

(b) Muestra que las ecuaciones de Friedmann para la velocidad y la aceleración del factor de escala del universo pueden escribirse como

$$\dot{R}^2 + \kappa = \frac{C}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 := h(R, \Lambda), \tag{2}$$

$$\ddot{R}^2 = \frac{R}{3}\left(\Lambda - \frac{3C}{2R^3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial R}\bigg|_{\Lambda}, \tag{3}$$

en donde la constante (muestra que es constante) $C := 8\pi\rho R^3/3$ y $h(R, \Lambda)$ es una función definida naturalmente por la ecuación (2).

(c) Muestra que el modelo de Eddington–Lemaître corresponde a valores $\Lambda = \Lambda_{\mathbb{E}}$ y $R > R_{\mathbb{E}}$, en donde

$$\Lambda_{\mathbb{E}} = \frac{4}{9C^2}, \qquad R_{\mathbb{E}} = \frac{3C}{2}. \tag{4}$$

El punto $\tilde{R}$ para el cual $\dot{R} = 0$ corresponde a $\tilde{R} = C$. Demuestra también que el modelo estático de Einstein corresponde a valores $\Lambda = \Lambda_{\mathbb{E}}$ y $R = R_{\mathbb{E}}$.

(d) Solamente para este inciso haz los re–escalamientos $R \to CR$, $\Lambda \to \Lambda C^2$ y $t \to Ct$. Muestra que esto equivale a escoger $C = 1$ y por lo tanto a un reescalamiento de unidades. Haz un diagrama Λ vs R para valores $h = 0, \ \pm 1$ variando la curvatura $\kappa = 0, \ \pm 1$. Identifica la línea horizontal $\Lambda = \Lambda_{\mathbb{E}}$ y muestra que las curvas $\Lambda_{\mathbb{E}}$, $\ddot{R} = 0$ y $h = 1$ se intersectan exactamente en el punto de los modelos estáticos de Einstein.

(e) Definamos $\Lambda = \alpha\Lambda_{\mathbb{E}}$ y $R_0 = \beta\tilde{R}$, en donde los parámetros α y β son cantidades adimensionales. Muestra que si en un diagrama Ω_Λ vs Ω_M se grafican las curvas correspondientes a $\alpha = \text{const}$, estas mismas corresponden a valores de $C = \text{const}$. Demuestra además que

$$C = H^2 R^3 \Omega_M = \frac{|k|^3}{H_0^2 \beta^3 \Omega_{M_0}}, \tag{5}$$

y que por lo tanto cuando la curvatura $\kappa \neq 0$, los puntos geométricos $\Lambda = \alpha \Lambda_E$ para $\alpha = \text{const}$ corresponden a que la siguiente ecuación sea satisfecha

$$\left(\frac{\Omega_M}{2\Omega_\Lambda} \right)^2 \pm \alpha \left(\frac{\Omega_\kappa}{3\Omega_\Lambda} \right) = 0. \tag{6}$$

En el caso en que $\kappa = 0$, entonces $\alpha \to \infty$ debido a que $C \to \infty$ y $\Lambda_E \to 0$. Muestra además que cuando $\kappa \neq 0$ entonces los puntos geométricos R para $\beta = \text{const}$ son tales que $\beta \Omega_{M_0} = \Omega_{\kappa_0}$ y por lo tanto

$$\Omega_{\Lambda_0} = 1 - (1 \mp \beta)\,. \tag{7}$$

En el caso en que $\kappa = 0$ entonces como $C \to \infty$ y $R_0 \to \infty$ se obtiene que $\beta \to 0$. Finalmente muestra el por qué cualquier punto en un diagrama Ω_{Λ_0} vs Ω_{M_0} fuera de aquellos que corresponden a $\kappa = 0$ constituyen una solución única a las ecuaciones de Friedmann debido a que para cada punto se obtiene $\Lambda,\ C,\ \kappa,\ H_0,\ R_0$ bien determinados.

(f) Considera un universo que se recolapsa en el futuro, i.e. $\dot{R}_\star = 0$ para algún tiempo $t_\star$ en el futuro. Muestra que

$$\Omega_\Lambda x^3 + \Omega_\kappa x + \Omega_M = 0, \tag{8}$$

con $x = R_\star / R$. Cuenta el número de raíces de la ecuación (8) que ocurren para los seis casos cuando $\Omega_\Lambda \lesseqgtr 0$ mezclados con aquellos para los cuales $\Omega_\kappa \lesseqgtr 0$ y muestra que la condición $\Omega_\Lambda < 0$ garantiza un recolapso excepto cuando $\Omega_\Lambda > 0$

junto con $\Omega_\kappa < 0$. Calcula el discriminante D de la ecuación (8)

$$D = \left(\frac{\Omega_M}{2\Omega_\Lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_\kappa}{3\Omega_\Lambda}\right)^3, \tag{9}$$

y muestra que $D = 0$ para $\Lambda = \Lambda_E$, así como que la condición $\Lambda > \Lambda_E$ implica expansión por siempre.

En lo que resta de este ejercicio consideremos a un Universo dominado por materia solamente **sin** constante cosmológica.

(h) Utilizando la métrica de Robertson–Walker muestra que el elemento de tres–volumen $\mathrm{d}V$ correspondiente a la hipersuperficie $x^0 = \text{const}$ está dado por

$$\mathrm{d}V = R^3 \mathfrak{R}^2 \sin^2(r/\mathfrak{R}) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r. \tag{10}$$

(i) Considera una distribución cosmológica discreta de galaxias y asume que tienen un espectro en forma de potencias de tal manera que la luminosidad de la fuente es $L(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$. Muestra entonces que la densidad de flujo de la fuente $S(\nu_0)$ (es decir, la cantidad de energía recibida por unidad de tiempo, por unidad de área, por unidad de ancho de banda: $\mathrm{Wm^{-2}Hz^{-1}}$) está dada por

$$S(\nu_0) = \frac{L(\nu_0)}{4\pi D^2 (1+z^2)^{1+\alpha}} \tag{11}$$

en donde la distancia efectiva $D = \mathfrak{R} \sin(r/\mathfrak{R})$ está dada por

$$D = \frac{2}{H_0 \Omega_{M_0}^2 (1+z)} \left\{ \Omega_{M_0} z + (\Omega_{M_0} - 2) \left[(\Omega_{M_0} z + 1)^{1/2} - 1 \right] \right\}. \tag{12}$$

(j) Sea N_0 el número de galaxias por unidad de volumen en la época presente. Muestra que si este número es constante a medida que el universo se expande, entonces el número de galaxias n por unidad de volumen por unidad de ángulo sólido está dado por:

$$\mathrm{d}n = N_0 D^2 \mathrm{d}r. \tag{13}$$

(k) Finalmente, calcula la intensidad de fondo $I(\nu_0)$ debida a esta distribución uniforme de galaxias y muestra que:

$$I(\nu_0) := \int S(\nu_0) dn = \frac{c}{H_0} \frac{L(\nu_0) N_0}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{(\Omega_{M_0} z + 1)^{1/2} (1+z)^{2+\alpha}}. \tag{14}$$

Verifica que para un universo Newtoniano está integral diverge y que no tiene ningún problema para un universo en expansión.

Este último resultado se conoce como la paradoja de Olbers pues este individuo se dio cuenta que en un universo isotrópico, Euclidiano e infinito, la radiación de fondo diverge.

(2) Considera el límite post–Newtoniano en relatividad general y definamos:

$$\phi = \frac{1}{2} (1 - g_{00}), \qquad a_i = g_{0i}, \tag{15}$$

donde ϕ es el potencial gravitacional.

(a) Muestra que si el campo gravito–eléctrico $\mathbf{g}$ y el gravito–magnético $\mathbf{h}$ están dados por:

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi, \qquad \mathbf{h} = \nabla \wedge \mathbf{a}, \tag{16}$$

entonces se satisfacen las ecuaciones tipo Maxwell de la gravedad:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi\rho, \tag{17}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0, \tag{18}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{g} = 0, \tag{19}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = -4 \left\{ 4\pi\rho v - \frac{\partial g}{\partial t} \right\}. \tag{20}$$

junto con la ecuación de movimiento (la fuerza de Lorentz):

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \mathbf{g} + v \wedge \mathbf{h}. \tag{21}$$

(b) Compara estas ecuaciones con las ecuaciones de Maxwell. ¿Qué diferencias encuentras?

(c) Consideremos de ahora en adelante un agujero negro que rota con momento angular $J = aM$. Para el límite $r \gg M$, donde el espacio es prácticamente plano, muestra que las ecuaciones de Maxwell implican que el campo gravito–eléctrico del agujero está dado por:

$$\mathfrak{g} = -M\frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}, \qquad (22)$$

y que utilizando el concepto del radio giromagnético podemos identificar a $\mathbf{J}/2$ como el momento dipolar giromagnético.

(d) Muestra que el campo gravito–magnético de un dipolo magnético está dado por:

$$\mathbf{h} = \frac{3(\mathbf{J}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{J}r^2}{r^5}, \qquad (23)$$

donde $J = aM$ es el momento angular.

(e) Calcula la torca $\mathbf{G}$ gravito–magnética que el agujero ejerce sobre un anillo de masa a su alrededor (piensa en un disco de acreción) integrando la torca por unidad de masa sobre el anillo $(\mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \mathbf{h}))$ para obtener:

$$\mathbf{G} = \frac{2\mathbf{J} \wedge \mathbf{l}}{r^3}, \qquad (24)$$

y concluye que la frecuencia de precesión gravito–magnética $\boldsymbol{\Omega}_p$ está dada por:

$$\boldsymbol{\Omega}_p = 2\mathbf{J}/r^3 \qquad (25)$$

La importancia de esta precesión en agujeros negros astrofísicos es que nos da un mecanismo mediante el cual un disco de acreción debe permanecer en el plano ecuatorial del agujero y de esta manera comunicar la dirección giroscópicamente estable a los jets ultrarelativistas que emanan del mismo.

(3) Considera un plasma astrofísico que se mueve de manera relativista, en ausencia de campos gravitacionales. Al igual que en hidrodinámica Newtoniana, es posible que existan ciertas discontinuidades en el flujo del plasma.

(I) Muestra que si x es la dirección ortogonal a la superficie de discontinuidad la cual corresponde a una onda de choque, entonces la ecuación de continuidad y la nulidad de la divergencia del tensor de energía–momento implican que los flujos de número de partículas, momento y energía sean conservados, es decir,

$$[nu^x] = 0, \qquad [T^{xx}] = [w(u^x)^2 + p] = 0, \qquad [T^{0x}] = [wu^0u^x] = 0. \tag{26}$$

Los corchetes $[a]$ aplicados a la cantidad física a significan $[a] := a_2 - a_1$, y los subíndices $1, 2$ se refieren a flujo pre y post–choque respectivamente. Utilizando la ecuación (26) muestra que en el sistema de referencia de la onda de choque

$$\beta_1\gamma_1/V_1 = \beta_2\gamma_2/V_2, \tag{27}$$

$$w_1\beta_1^2\gamma_1^2 + p_1 = w_2\beta_2^2\gamma_2^2 + p_2, \tag{28}$$

$$w_1\beta_1\gamma_1^2 = w_2\beta_2\gamma_2^2, \tag{29}$$

con $V_{1,2} := 1/n_{1,2}$ los volúmenes por partícula y $\gamma_{1,2}$ los correspondientes factores de Lorentz para las velocidades $\beta_{1,2}$.

Las ecuaciones anteriores se conocen como las condiciones de salto de Taub. Lo que ahora sigue es calcular estas condiciones de salto en un sistema de referencia arbitrario.

(II) Muestra que para flujo unidimensional la nulidad de la divergencia del tensor de energía momento implica la conservación de energía ($\partial T^{0\alpha}/\partial x^\alpha = 0$) y la ecuación de conservación de momento ($\partial T^{1\alpha}/\partial x^\alpha = 0$), es decir

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\beta\frac{p+\epsilon+\rho}{1-\beta^2}\right\} + \frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^k\frac{p+\beta^2(\epsilon+\rho)}{1-\beta^2}\right\} - \frac{kp}{r} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\epsilon+\beta^2 p+\rho[1-\sqrt{1-\beta^2}]}{1-\beta^2}\right\} + \frac{1}{r^k}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^k\beta\frac{p+\epsilon+\rho[1-\sqrt{1-\beta^2}]}{1-\beta^2}\right\} = 0, \tag{31}$$

donde la densidad de masa $\rho := mn$ y $e := \rho + \epsilon$, con ϵ la densidad de energía interna. Muestra también que la ecuación de continuidad puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^k}\left\{r^k\beta\frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\} = 0, \tag{32}$$

con $k = 0, 1, 2$ dependiendo si la simetría del problema es plana, cilíndrica o esférica.

Las tres ecuaciones anteriores pueden escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(r^k A\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^k B\right) + C = 0, \tag{33}$$

con A y B funciones que dependen de la coordenada r y el tiempo t.

(III) Integra la ecuación (33) sobre la hipersuperficie Φ que se muestra en la figura 1 y muestra con ayuda del teorema de Stokes que

$$\oint_{\partial\Phi}\left(r^k A\,dr - r^k B\,d\tau\right) + \int\!\!\int_{\Phi} C\,d\tau dr = 0. \tag{34}$$

De aquí muestra que como dr y $d\tau$ son cantidades de primer orden, entonces la ecuación sobre la hipersuperficie ϕ es despreciable en comparación con la de su frontera $\partial\phi$. Demuestra además que cuando el volumen de integración tiende a cero entonces la coordenada r permanece constante a lo largo de cada segmento de integración y por lo tanto

$$\oint_{\partial\Phi}(-A\,dr + B\,d\tau) \approx -\left[A_1(r_1 - r_0) - A_2(r_1 - r_0)\right] + B_1(\tau_1 - \tau_0) - B_2(\tau_1 - \tau_0) = 0. \tag{35}$$

Con esto muestra entonces que

$$\beta_s[A] = [B], \tag{36}$$

en donde la velocidad de la onda de choque $\beta_s := (r_1 - r_0)\,/\,(t_1 - t_0)$ y como antes $[\zeta] := \zeta_2 - \zeta_1$. Muestra con todo esto que las condiciones de salto de Taub

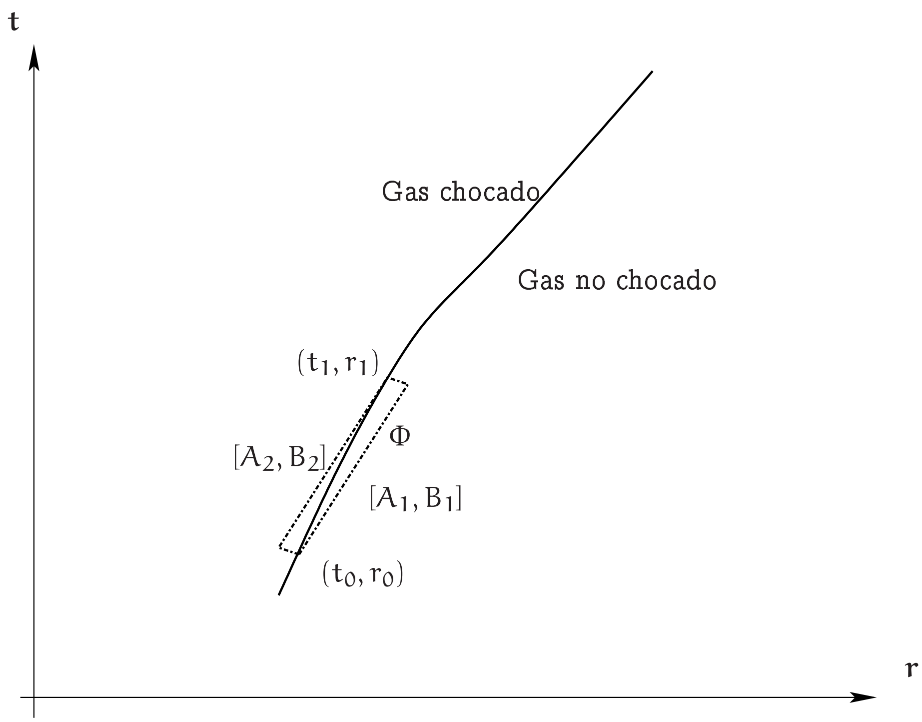

Figura 1: La figura muestra la línea de universo de una onda de choque. La hipersuperficie ϕ es elegida de tal forma que su espesor y su altura tiendan a cero para poder relacionar los lados 1 y 2 del flujo antes y después del choque.

escritas en cualquier sistema de referencia están entonces dadas por

$$\beta_s \left[\beta \frac{p+\epsilon+\rho}{1-\beta^2} \right] = \left[\frac{p+\beta^2(\epsilon+\rho)}{1-\beta^2} \right], \tag{37}$$

$$\beta_s \left[\frac{\epsilon+\beta^2 p+\rho \left[1-\sqrt{1-\beta^2}\right]}{1-\beta^2} \right] = \left[\beta \frac{p+\epsilon+\rho\left[1-\sqrt{1-\beta^2}\right]}{1-\beta^2} \right], \tag{38}$$

$$\beta_s \left[\frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] = \left[\beta \frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \right]. \tag{39}$$

(IV) De ahora en adelante escogeremos un sistema de referencia en el cual el gas pre–choque esté en reposo y por lo tanto $\beta_1 = 0$. Escribe explícitamente las relaciones de Taub en este sistema de referencia y muestra que

$$\beta_s - \beta_2 = \frac{\beta_2\left(1-(\beta_2)^2\right)}{(\beta_2)^2 p_2 + \epsilon_2 + \rho_2\left\{1-\sqrt{(1-(\beta_2)^2)}\right\} - \epsilon_1\left(1-(\beta_2)^2\right)}, \tag{40}$$

$$\epsilon_2 = \rho_2\{\gamma_2 - 1\} + \frac{\beta_s \epsilon_1 + \beta_2 p_1}{\beta_s - \beta_2}, \tag{41}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\beta_s}{\beta_s-\beta_2}\frac{1}{\gamma_2} = \gamma_2\left\{\frac{p_2+\epsilon_2}{p_2+\epsilon_1}\right\} + \left\{\frac{\rho_2}{p_2+\epsilon_1}\left(\gamma_2-1\right)\right\}. \tag{42}$$

Con esto muestra que la condición de brinco para la densidad de energía está dada por

$$e_2 = \rho_2\gamma_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\gamma_2\epsilon_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}p_1\frac{\beta_2}{\beta_s}\gamma_2, \tag{43}$$

y por tanto la energía por unidad de masa inmediatamente después del choque es entonces

$$\frac{e_2}{\rho_2} = \frac{\gamma_2}{\rho_1}\left\{e_1 + p_1\frac{\beta_2}{\beta_s}\right\}. \tag{44}$$

(V) En lo subsecuente trabajaremos únicamente con una onda de choque fuerte, para la cual las cantidades p_1 y ϵ_1 son pequeñas en comparación con p_2 y e_2. Muestra que para este caso

$$\epsilon_2 = \rho_2 c^2\left(\gamma_2 - 1\right). \tag{45}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{p_2}\{\gamma_2(p_2+\epsilon_2)+\epsilon_2\}. \tag{46}$$

Además evalúa estas relaciones para un gas politrópico tal que $p = (\kappa - 1)\epsilon$ y encuentra que

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \gamma_2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{1}{\kappa - 1}, \tag{47}$$

$$\Gamma_s = \frac{\gamma_2}{\sqrt{1 - 2(\kappa - 1)/\kappa}}, \tag{48}$$

En donde el Γ_s representa el factor de Lorentz de la onda de choque y γ el del flujo pre–choque. ¡¡¡Nota que la densidad post-choque no tiende a una constante en el caso de choques fuertes, como sucede en el caso Newtoniano!!!

De ahora en adelante considera que $\kappa = 4/3$ y que el flujo es altamente relativista. Considera también una onda de choque esférica de tal manera que esta haya sido generada por una explosión altamente energética en el origen al tiempo $t = 0$.

(VII) Muestra que

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{2}\Gamma_s^2 \gg 1. \tag{49}$$

Esto indica que en lo sucesivo el análisis se hará aproximadamente a $O(\Gamma_s^2)$. También demuestra que

$$\gamma_2 n_2 = 2\Gamma_s^2 n_1, \qquad e_2 = \frac{n_2}{n_1}\gamma_2 w_1 = 2\Gamma_s^2 w_1, \qquad p_2 = \frac{2}{3}\Gamma_s^2 w_1. \tag{50}$$

(VIII) Muestra que las ecuaciones de conservación de energía, de momento y de entropía en el caso de simetría esférica pueden escribirse como:

$$\frac{d}{dt}\left(p\gamma^4\right) = \gamma \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{51}$$

$$\frac{d}{dt}\ln\left(p^3\gamma^4\right) = -\frac{4}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\beta\right), \tag{52}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{n^{4/3}}\right) = 0. \tag{53}$$

A partir de ahora, para simplificar notación omitiremos subíndices cuando las cantidades se refieran al gas chocado detrás de la onda de choque. La velocidad de la onda de choque está dada por $\dot{R} = \beta_s := \sqrt{1 - 1/\Gamma^2}$. Supongamos ahora que

$$\Gamma^2 = \frac{A}{t^m}, \tag{54}$$

(VII) Muestra que a $O(\Gamma^2)$ se cumple la siguiente relación:

$$\frac{r}{R} = 1 + \frac{1}{2\Gamma^2(m+1)}. \tag{55}$$

(VIII) Define ahora la variable de similaridad ϕ mediante la relación:

$$\frac{r}{R} = 1 + \frac{\phi}{2\Gamma^2(m+1)}. \tag{56}$$

y muestra que

$$\phi = \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2(m+1)\Gamma^2, \tag{57}$$

(IX) Por comodidad define otra variable de similaridad χ como

$$\chi = 1 + \left(1 - \frac{r}{R}\right) 2(m+1)\Gamma^2. \tag{58}$$

Muestra con esto que las condiciones de frontera (49) y (50) toman la forma

$$p = \frac{3}{2}\omega_1\Gamma^2 f(\chi), \qquad n\gamma = 2n_1\Gamma^2 h(\chi), \qquad \gamma^2 = \frac{1}{2}\Gamma^2 g(\chi). \tag{59}$$

Además muestra que como

$$\frac{\partial}{\partial \ln t} = -m\frac{\partial}{\ln \Gamma^2} + \left[(m+1)(2\Gamma^2 - \chi) + 1\right]\frac{\partial}{\partial \chi}, \tag{60}$$

$$t\frac{\partial}{\partial r} = -\left[1 + 2(m+1)\Gamma^2\right]\frac{\partial}{\partial \chi}, \tag{61}$$

$$\frac{d}{d \ln t} = -m\frac{\partial}{\partial \ln \Gamma^2} + (m+1)\left(\frac{2}{g} - \chi\right)\frac{\partial}{\partial \chi}. \tag{62}$$

Entonces las ecuaciones (51), (52) y (53) se obtiene que

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}\ln f}{\ln\chi} = \frac{8(m-1)-(m-4)g\chi}{(m+1)\{4-8g\chi+g^2\chi^2\}}, \tag{63}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}\ln g}{\ln\chi} = \frac{(7m-4)-(m-2)g\chi}{(m+1)\{4-8g\chi+g^2\chi^2\}}, \tag{64}$$

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}\ln h}{\ln\chi} = \frac{2(9m-8)-2(5m-6)g\chi+(m-2)g^2\chi^2}{(m+1)\{4-8g\chi+g^2\chi^2\}(2-g\chi)}. \tag{65}$$

Gracias a buscar soluciones autosimilares al problema de una onda de choque explosiva relativista es posible llevar el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias las cuales pueden resolverse fácilmente siempre y cuando se conozca el índice de similaridad m. Por argumentos energéticos este mismo resulta ser $m=3$ en este caso en particular.

(4) Considera un plasma astrofísico en presencia de campos gravitacionales fuertes.

(I) Muestra que las ecuaciones (1), (2) y (3) del examen en clase (ver `www.mendozza.org/gravitacion`) de la hidrodinámica relativista en presencia de campos gravitacionales son válidas.

(II) Al igual que en el examen de clase, considera un espacio–tiempo estático. Define la velocidad $v^k = \mathrm{d}x^k/\mathrm{d}\tau$ y muestra que $v^k = \mathrm{d}x^k/\sqrt{g_{00}}\mathrm{d}x^0$. Con esto muestra que la cuatro velocidad u^μ es tal que

$$u^0 = \gamma/\sqrt{g_{00}}, \qquad y \qquad u^k = \gamma v^k, \tag{66}$$

con $\gamma^{-2} := 1 - v^2$. Con esto muestra que si el flujo es además adiabático entonces la componente temporal de la ecuación de Euler (ecuación (2) del examen en clase) puede simplificarse enormemente para dar:

$$\gamma \boldsymbol{v} \cdot \nabla \left(\frac{w}{n}\gamma\sqrt{g_{00}} \right) = 0, \tag{67}$$

y por lo tanto la ecuación de Bernoulli en relatividad general toma la forma

$$\frac{w}{n}\gamma\sqrt{g_{00}} = \text{const.} \tag{68}$$

sobre una línea de corriente.

(III) Muestra que en el límite de campo débil la ecuación (68) converge a la ecuación de Bernoulli en relatividad especial.

(IV) Considera ahora un flujo simétricamente esférico que es acretado hacia un agujero negro de Schwarzschild. Muestra utilizando la ecuación de continuidad que

$$nur^2 = \text{const.}, \tag{69}$$

en donde u es la componente radial de la cuatro velocidad u^μ. También muestra que

$$u_0 = \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right)^{1/2}. \tag{70}$$

Con esto y utilizando la ecuación de Bernoulli (68) muestra que

$$\left(\frac{p+e}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2\right) = \text{const.} \tag{71}$$

Las ecuaciones (69) y (71) representan las integrales de movimiento para un flujo de acreción con simetría esférica hacia un agujero negro de Schwarzschild.

En lo que resta de este ejercicio se toma un sistema de unidades de tal forma que $8\pi G = c = 1$. Imagina que la acción S del campo gravitacional está dada por una modificación métrica, es decir

$$S = -m \int ds - \int f(R)\sqrt{-g}\, d\Omega + \int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega, \tag{72}$$

En donde Λ está relacionada con el tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ mediante la relación

$$\frac{1}{2} T_{\mu\nu} = \frac{\partial \sqrt{-g}\, \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \sqrt{-g}\, \Lambda}{\partial \left(\partial g^{\mu\nu} / \partial x^\alpha\right)}, \tag{73}$$

y la función $f(R)$ es una función arbitraria del escalar de Ricci R.

(V) Explica el por qué la ecuación (73) es una forma más general de escribir la acción para un campo gravitacional.

Las ecuaciones de campo que se obtienen directamente de la variación δS en la relación (73) están dadas por (¡NO intentes demostrarlas para el examen! pero diviertete el resto de tus vacaciones haciéndolo...)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T^{\text{curv}}_{\mu\nu} + T^{\text{mat}}_{\mu\nu} / f'(R), \tag{74}$$

en donde el tensor $T^{\text{mat}}_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía–momento estándard asociado a la materia y el tensor (de energía–momento) $T^{\text{curv}}_{\alpha\beta}$ asociado a curvatura está definido por

$$T^{\text{curv}}_{\alpha\beta} := \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left[f(R) - R f'(R) \right] + f'(R)^{;\mu\nu} \left(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) \right\}, \tag{75}$$

Nota que la ecuación (74) converge a las ecuaciones de Einstein cuando $f(R) = R$. Además observa que las modificaciones solo se dan a nivel de la ecuación de campo (75). La descripción geométrica de la conexión, el tensor de Riemann, etc. es exactamente la misma que en relatividad general. La métrica para un espacio–tiempo esféricamente simétrico está dada por

$$ds^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{76}$$

En el caso de que se consideren pequeñas correcciones a la relatividad general dependientes de un parámetro $\alpha \ll 1$ -el cual, cuando $\alpha \to 0$ hace que se converja a relatividad general- entonces resulta que

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{(1-\alpha)} \left[1 - \left(\frac{r_S}{r} \right)^{(1-\alpha/2)} \right] \tag{77}$$

$$B = \left(\frac{r}{r_s} \right)^{\alpha} \frac{1}{A} \tag{78}$$

$$f(R) = (3\alpha)^{\alpha/2} R^{(1-\alpha/2)} \approx R \left[1 - \frac{\alpha}{2} \ln R + \frac{\alpha}{2} \ln(3\alpha) \right] \tag{79}$$

(vi) De la misma manera que en el problema (1) del examen de clase, construye la generalización de la ecuación de balance energético (ecuación (7) del examen de clase) y la de Openheimer & Volkoff (ecuación (10) del examen de clase) para teorías métricas de gravitación ligeramente distintas de relatividad general.

(vii) Utilizando las relaciones del inciso anterior calcula a orden de magnitud el criterio de estabilidad de Jeans en esta primera aproximación de teorías métricas de gravitación.