Astrofísica Relativista
Examen

Sergio Mendoza <sergio@mendozza.org>
`http://www.mendozza.org/sergio`
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Agosto 10, 2009

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. Forzosamente debes contestar la pregunta número (1), tanto como te sea posible. Si utilizas notación de Einstein, hazlo de tal manera que los índices latinos tomen valores 1,2,3 y los griegos 0,1,2,3. En todos tus cálculos enfatiza la física y explica (¡dí no a las matemáticas sin sentido!). Puedes utilizar las ecuaciones de la hoja de información SIN demostrarlas, pero cuando las utilices, haz referencia a las mismas. No utilices un resultado que hayamos visto en clase SIN ANTES demostrarlo. Todas las preguntas tienen el mismo peso. Argumentos inteligentes, eficacia y orden en tus respuestas son la clave para obtener una buena calificación. El examen tiene una duración de cuatro horas. ¡Buena Suerte! †‡

(1) Considera un plasma astrofísico sin rotación que es acretado hacia un agujero negro de Schwarzschild. En este problema se han escogido unidades geometrodinámicas para las cuales la velocidad de la luz c y la constante universal de gravitación de Newton G

† El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación igual a cero en el curso y les calificaré con NA en el mismo.

‡ Antes de comenzar a escribir tus respuestas, lee con calma el examen por completo. Esto ayudara a que tu mente se relaje y comience a profundizar en todas las preguntas.

son tales que $G = c = 1$.

Cuando las ecuaciones de la hidrodinámica se tienen que escribir en la presencia de un campo gravitacional significante hay que reemplazar algunas derivadas ordinarias en las ecuaciones de movimiento por derivadas covariantes. La ecuación de continuidad, la ecuación de Euler y la ecuación de conservación de la entropía se escriben respectivamente de la siguiente manera (¡¡¡no lo demuestres!!!)

$$n^{\mu}{}_{;\mu} = 0 \tag{1}$$

$$\omega u^{\mu} u_{\nu;\mu} = \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} - u_{\nu} u^{\mu} \frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} \tag{2}$$

$$(\sigma u^{\alpha})_{;\alpha} = 0. \tag{3}$$

Las dos últimas relaciones se obtienen de pedir que la divergencia generalizada del tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ sea nula, es decir,

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0. \tag{4}$$

En relatividad general se dice que un campo es estático si el cuerpo que produce el campo se encuentra fijo en el sistema de referencia en el cual el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ no depende de la componente temporal x^0. De esta manera, como ambas direcciones del tiempo son equivalentes entonces puede escogerse un sistema de referencia en el cual el intervalo ds no varíe cuando se cambie el signo de x^0 y por lo tanto $g_{0\alpha} = 0$ para dicho campo.

(a) Muestra que cuando la tres velocidad del fluido es cero entonces la cuatro–velocidad $u^{\alpha} := dx^{\alpha}/ds$ satisface:

$$u^{\alpha} = 0, \qquad u^0 = \gamma/\sqrt{g_{00}}, \qquad u_0 = \sqrt{g_{00}}\gamma. \tag{5}$$

con $v_k = dx_k/d\tau$ siendo τ el tiempo propio.

(b) Considera ahora un flujo adiabático y muestra con ayuda de la primera ley de la termodinámica (o de cualquier otra manera) que la ecuación (2) implica que

$$u^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{w}{n} u_{\eta} \right) = \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} \left(\frac{w}{n} \right) + \frac{w}{n} u^{\alpha} u_{\delta} \Gamma^{\delta}_{\eta\alpha}, \tag{6}$$

(c) Muestra que la componente temporal de la ecuación (6) es

$$\gamma \frac{\boldsymbol{v}}{c} \cdot \nabla \left(\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} \right) = 0. \tag{7}$$

Concluye de aquí que a lo largo de una línea de corriente se sigue que la cantidad

$$\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} = \text{ const.,} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{w}{n} u_0 = \text{const.} \tag{8}$$

es una constante. Este resultado generaliza la ecuación de Bernoulli en campos gravitacionales fuertes.

(d) Muestra que en el espacio-tiempo de Schwarzschild la velocidad

$$u_0 = \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2 \right)^{1/2}. \tag{9}$$

y por lo tanto la ecuación de Bernoulli es

$$\frac{p+e}{n} \left(1 - \frac{2m}{r} + u^2 \right)^{1/2} = \text{const.,} \tag{10}$$

para cada línea de corriente.

(e) Muestra utilizando la ecuación de continuidad (1) que para este flujo de acreción radial sobre el agujero

$$nur^2 = \text{const.,} \tag{11}$$

(f) Toma la diferencial de las ecuaciones anteriores para eliminar dn y muestra que

$$\frac{dr}{r} \left[2V^2 - \frac{m}{r\,(1 - 2m/r + u^2)} \right] + \frac{du}{u} \left[V^2 - \frac{u^2}{(1 - 2m/r + u^2)} \right] = 0, \tag{12}$$

en donde

$$V^2 := \frac{d\,\ln(p+e)}{d\,\ln n} - 1. \tag{13}$$

Muestra además que el punto crítico de la ecuación (13) corresponde a que los corchetes en la ecuación anterior sea cero y describe el punto en donde la velocidad de caída crece monotónicamente.

(2) Considera un universo homogéneo e isotrópico como el nuestro en donde el principio cosmológico es válido.

(a) Asume que el universo es tal que existe constante cosmológica, radiación y materia. Define el parámetro de densidad $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ en donde el subíndice i se refiere a materia (M), radiación (R), curvatura (κ) y constante cosmológica (Λ). Para cada caso, este parámetro de densidad está definido respectivamente por

$$\Omega_{M_0} := \frac{8\pi G \rho_{M_0}}{3H_0^2}, \qquad \Omega_{R_0} := \frac{8\pi G \rho_{R_0}}{3H_0^2}, \tag{14}$$

$$\Omega_{\kappa_0} := -\frac{c^2}{a_0^2 H_0^2} = -\frac{c^2\kappa}{H_0^2}, \qquad \Omega_{\Lambda_0} := \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \tag{15}$$

Muestra con esto que la constante de Hubble $H(t)$ definida para cualquier tiempo cósmico t, i.e. la velocidad de expansión del universo, satisface la relación

$$H^2(a) = H_0^2 \left\{ \frac{\Omega_{R_0}}{a^4} + \frac{\Omega_{M_0}}{a^3} + \frac{\Omega_{\kappa_0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda_0} \right\}. \tag{16}$$

Finalmente muestra con esto que

$$\Omega_{M_0} + \Omega_{\kappa_0} + \Omega_{\Lambda_0} = 1. \tag{17}$$

(b) Muestra que si a *cualquier* época en el universo se definen los parámetros

$$\Omega_M := \frac{8\pi G\rho}{3H^2}, \quad \Omega_\kappa := -\frac{\kappa c^2}{a^2 H^2}, \quad \Omega_R := \frac{8\pi G\rho}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H^2}, \tag{18}$$

entonces se cumple la relación

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda = 1, \tag{19}$$

para cualquier tiempo cósmico t. Muestra además que si se conoce H_0 de manera observacional, entonces se conoce directamente Λ y ρ_0 de las observaciones de Ω_{Λ_0} y Ω_{κ_0}. Si $\kappa \neq 0$ muestra entonces que el valor de R_0 es entonces conocido. ¿Qué significado físico tiene esta última condición?

(c) Explica brevemente que es la energía oscura y como afecta la evolución del universo. ¿Por qué razón observacional fue propuesta? ¿Cuál es su ecuación de estado? También describe que es la materia oscura bariónica y no–bariónica. ¿Por qué razón observacional se cree que exista materia oscura en el universo? ¿Cómo afecta la existencia de materia oscura no–bariónica en el universo a la dinámica del mismo? Si no existe materia oscura en el universo, ¿Cómo pueden explicarse estas últimas observaciones?

(d) Explica por qué razón se ha propuesto a lo largo del tiempo explicar modelos inflacionarios, de materia oscura y de expansión acelerada (energía oscura) utilizando teorías alternativas, como las teorías métricas $f(R) \propto R^n$, en donde n es un entero distinto de la unidad y R el escalar de Ricci. Menciona brevemente que es MOND (Modified Newtonian Dynamics) y por qué razón fue introducida por Milgrom como una alternativa a la materia oscura no–bariónica.

(e) Define y explica el corrimiento al rojo z aplicado a la recesión de galaxias en el universo. De aquí muestra la ley de Hubble $v = H_0 r$, donde v es la velocidad de recesión de una galaxia, r su distancia y H_0 es la constante de Hubble. ¿Por qué razón la constante de Hubble no es una "verdadera" constante?

(f) La ecuación de estado (presión p como función de la densidad de energía e o densidad de masa ρ) para la energía oscura en el universo está dada por:

$$p_X = \omega c^2 \rho_X, \tag{20}$$

done ω es una constante negativa menor a $-1/2$ (y muy probablemente ~ -1 de acuerdo a observaciones de las fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo en microondas). Muestra que:

$$\rho_X \propto R^{-3(1+\omega)}, \tag{21}$$

$$\rho_X / \rho_M \propto (1+z)^{3\omega}, \tag{22}$$

donde ρ_M es la densidad de masa y z es el corrimiento al rojo. Muestra que el parámetro de desaceleración está dado por:

$$q_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\omega\Omega_X \sim \frac{1}{2} + \omega \tag{23}$$

Explica con esto el por qué $\omega < -1/2$ implica una expansión acelerada. Muestra que la constante de Hubble $H(z)$ está dada por:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_X \exp\left\{ 3 \int_0^z [1 + \omega(x)] \, d\ln(1+x) \right\} \tag{24}$$

Muestra que para que el universo se recolapse es necesario que $\omega > -1/3$. ¿Qué deduces de esto?

(g) Muestra que el corrimiento al rojo z y el factor de escala $a(t)$ están relacionados mediante la fórmula

$$1 + z = \frac{1}{a(t)}. \tag{25}$$

(3) Escribe un ensayo de por lo menos dos cuartillas sobre discos de acreción. Utiliza las matemáticas necesarias (pero no muchas) y física, mucha física. El escrito debe por lo menos contener lo siguiente. Explica mediante el uso de acreción de Bondi cómo es posible que exista acreción hacia una estrella recién formada. Menciona todos los tipos de acreción que existen y enumera ejemplos astrofísicos de todos estos a nivel galáctico y extragaláctico. Menciona las limitaciones del modelo de Bondi y explica la ventaja del modelo de Ulrich y como este es capaz de generar un disco de acreción alrededor de un objeto “condensado”. Explica con detalle cómo funciona el mecanismo de acreción en un disco y cómo este es capaz de generar luminosidad, incluso para el caso de discos alrededor de agujeros negros. Explica por qué un disco de acreción alrededor de una estrella tiene que ser delgado y calcula a orden de magnitud la luminosidad del mismo. ¿Qué cambios deben hacerse a este modelo de manera relativista para aplicaciones hacia un disco alrededor de un agujero negro?

(4) Considera un agujero negro de Schwarzschild.

(a) Explica cual es su métrica y que significado tiene cada coordenada.

(b) Utiliza las ecuaciones de Euler–Lagrange (o de cualquier otra forma, por ejemplo utilizando las ecuaciones de Hamilton–Jacobi) y muestra que el momento angular $h = r^2\dot{\varphi}$ y la energía $\xi = (1 - r/r_S)\dot{t}$ de una partícula de prueba son cantidades conservadas. Aquí r_S es el radio de Schwarzschild y $\dot{[\,]}$ es la derivada con respecto al tiempo propio τ.

(c) La superficie de una estrella, que ocurre en $r = R$ es tal que su presión es igual a cero y debido a la simetría esférica de la misma entonces los puntos sobre la misma siguen geodésicas como tiempo que satisfacen $d\Omega = 0$. Muestra que la métrica de Schwarzschild evaluada en la superficie de la estrella es tal que

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\xi^2}\left(1 - \frac{r_S}{R}\right)^2\left(\frac{r_S}{R} - 1 + \xi^2\right). \tag{26}$$

Muestra además que cuando $t \to \infty$, entonces $\dot{R} \to 0$ y que $R \to r_S$. También muestra que R alcanza un valor máximo igual a $r_S/\left(1 - \xi^2\right)$. De aquí que el colapso pueda pensarse como que empieza con velocidad igual a cero al radio R_{max} y se aproxima de manera asintótica a R_S.

(d) Muestra que en términos de la derivada con respecto al tiempo propio la superficie de la estrella obedece

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{r_S}{R} - 1 + \xi^2\right) = \left(1 - \xi^2\right)\left(\frac{R_{max}}{R} - 1\right). \tag{27}$$

De aquí muestra que la superficie de la estrella cae desde $R = R_{max}$ hasta $R = r_S$ en un tiempo propio finito y que de hecho la superficie de la estrella cae hasta $R = 0$ en un tiempo propio finito $\tau = \pi M/\left(1 - \xi^2\right)^{3/2}$.

(e) En el caso de geodésicas radiales nulas la métrica de Schwarzschild es $c^2dt^2 = dr^2/\left(1 - r_S/r\right)^2 \equiv dr_\star^2$. Muestra que

$$r_\star = r + r_S \ln\left|\frac{r - r_S}{r_S}\right|. \tag{28}$$

La coordenada radial de Rogge-Wheeler $r_\star$ es válida para el rango $r_S \leq r < \infty$ con $-\infty < t < \infty$.

(f) Define la *coordenada radial nula hacia adentro* v como $v \equiv ct + r_\star$, con $-\infty < v < \infty$, y muestra que la métrica toma la forma de la métrica de Eddington–Finkelstein dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)dv^2 - 2drdv - r^2d\Omega^2. \tag{29}$$

Esta métrica está definida únicamente para $r > r_S$. Explica donde es singular esta métrica y con esto justifica el por que se puede hacer una continuación analítica de la misma para $r < r_S$.

(g) Muestra que los conos de luz se "voltean" hacia el origen de coordenadas a medida que $r \to r_S$ partiendo de $r > r_S$. Para esto muestra que

$$2\mathrm{d}r\mathrm{d}v = -\mathrm{d}s^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\mathrm{d}v^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2 \leq 0, \tag{30}$$

para lineas de universo como–tiempo o nulas tales que $r < r_S$. De aquí muestra que, como $\mathrm{d}v > 0$ para lineas de universo dirigidas al futuro, entonces $\mathrm{d}r \leq 0$ y con esto argumenta que los puntos $r < r_S$ están causalmente desconectados con respecto a los puntos $r > r_S$.

Hoja de información†

Métrica de Robertson–Walker:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= c^2dt^2 - R^2(t)\left\{dr^2 + \mathfrak{R}^2\sin^2(r/\mathfrak{R})d\Omega^2\right\} \\
ds^2 &= c^2dt^2 - R^2(t)\left\{\frac{dx^2}{1-kx^2} + x^2d\Omega^2\right\},
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Ecuaciones de Friedmann:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0. \tag{32}$$

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G R\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda R, \tag{33}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho R^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{3}\Lambda R^2. \tag{34}$$

Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{35}$$

Métrica de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &\frac{(\Delta - a^2\sin^2\theta)dt^2}{\Sigma}c^2dt^2 - 2a\sin^2\theta\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}dtd\varphi - \\
&-\frac{(r^2+a^2) - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

en donde

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{37}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2GMr/c^2. \tag{38}$$

† Puedes utilizar cualquier ecuación en esta página sin demostrarla.