Astrofísica Relativista
Examen–tarea

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>
http://www.astroscu.unam.mx/~sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Agosto 10, 2009

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. En todos tus cálculos enfatiza la física y justifica extensamente todo lo que hagas. En particular, si utilizas tablas de integrales para algo que de verdad no puedes resolver escribe la referencia. En todo el examen índices griegos toman valores 0,1,2,3 y los índices latinos toman valores 1,2,3. Las unidades han sido escogidas de tal manera que $G = c = 1$, i.e. se ha tomado un sistema de unidades *geometrodinámico*. Argumentos inteligentes, eficacia y orden en tus respuestas son la clave para obtener una buena calificación. Este examen debe ser entregado personalmente a mas tardar a las 22.00hrs del jueves 13 de agosto de 2009 en la oficina 202 de Sergio Mendoza en el Instituto de Astronomía†. ¡Buena Suerte!

(1) Muestra que en un universo de FLRW sabemos que la evolución de la densidad de energía $\rho = e$ está dada por $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ donde a es el factor de escala y la ecuación de estado es $p = w\rho$. Cuando el universo está dominado por radiación $w = 1/3$ es la ecuación de estado de las partículas relativistas dominantes. En este caso la métrica

† El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación de CERO en TODO el curso y les calificaré con NA en el mismo

del espacio homogeneo es

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \tag{1}$$

A primer orden, una inhomogeneidad (o perturbación) en el universo de Friedmann puede ser descrita como una región en el espacio-tiempo donde la curvatura es positiva (y uniforme), región que inicialmente se expande con el Universo. La métrica que describe a la región de inhomogeneidad es entonces

$$ds^2 = d\tau^2 - S^2 \left[(1 - \kappa r^2) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \tag{2}$$

donde κ es la densidad de energía total por unidad de masa contenida en la inhomogeneidad. Esto es, $\kappa/2 = \delta\rho_0 a_0^{-1+3w}$.

(I) Demuestra que la ecuación de Friedmann en esta región puede escribirse como

$$\left(\frac{dS}{d\tau}\right)^2 = (\rho_0 + \delta\rho_0) S^{-1-3w} - \delta\rho_0\, a_0^{-1-3w}, \tag{3}$$

o,

$$\left(\frac{dS}{d\tau}\right)^2 = \rho_0(1 + \delta_0) S^{-1-3w} - \delta_0\, a_0^{-1-3w}. \tag{4}$$

donde $\delta = \delta\rho/\rho$ y δ_0 es su valor en un momento inicial $t = t_0$, $\tau = \tau_0$ en el cual $a_0 = S_0$. De esta última ecuación deduce que, si la inhomogeneidad δ es pequeña, la expresión para S_{max}, el punto de expansión máxima está dado por,

$$S_{max} \approx \delta_0^{-1/(1+3w)} a_0 \tag{5}$$

Después de este punto, la region de la inhomogeneidad invierte su evolución dando lugar a un colapso gravitacional.

Para establecer contacto con la métrica del espacio-tiempo de fondo, podemos relacionar los tiempos coordenados en ambas métricas mediante la ecuación

$$dt\, a^{-1} (1 + \delta_0)^{-w/(1+w)} = d\tau\, S^{-1}. \tag{6}$$

(II) Resuelve esta ecuación utilizando la ley de expansión para el caso general del universo homogeneo dominado por materia con ecuación de estado $p = w\rho$, muestra entonces que el momento de máxima expansión de la inhomogeneidad está dado por

$$t_c \approx t_0 \delta_0^{-3(1+w)/[2(1+3w)]}. \tag{7}$$

Para que una región se colapse en una estructura compacta como una estrella o un agujero negro, es necesario que, en el momento de máxima expansión el radio de dicha región sea mayor al radio de Jeans (muestra el por qué el cálculo presente requiere de una w en la formula del radio de Jeans):

$$R_J = \sqrt{\frac{w\pi}{G\rho}}. \tag{8}$$

(III) Muestra que para el caso de un universo dominado por radiación, $R_J \approx R_H$, el radio de Hubble u *horizonte* cosmológico. Demuestra, usando las ecuaciones (5) y (7) que la condición $S_{\max} \geq R_J$ puede escribirse como

$$\rho_0 \, a_0^2 \, \delta \geq \sqrt{w\pi} \tag{9}$$

Esto finalmente puede re-escribirse como la siguiente condición: Para que una región inhomogenea se colapse y forme un objeto compacto es necesario que, en una región fuera del horizonte cosmológico $\delta_0 \gtrsim w$ (no es necesario mostrar esta última expresión).

En el universo temprano y dominado por radiación, inhomogneidades de suficiente amplitud en ambientes muy densos se collapsan formando directamente agujeros negros que reciben el nombre de primordiales (ANPs). Enfoquémonos ahora en la cosmología de tales objetos. Hasta hoy, las observaciones muestran que las perturbaciones primordiales de densidad Δ siguen una ley de probabilidad Gaussiana. De modo que la densidad de probabilidad de una perturbación con amplitud Δ está dada por:

$$\mathbb{P}(\Delta(M)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Delta(R_M)} \exp\left[- \frac{\Delta^2}{2\sigma_\Delta(R_M)^2} \right] \tag{10}$$

donde σ_Δ es la varianza de las perturbaciones Δ y es una cantidad que se mide como la amplitud promedio de las inhomogeneidades observadas a cieta escala, por ejemplo, en la radiación cósmica de fondo. Matemáticamente, la varianza $\sigma_\Delta(R_M)$ es la transformada de Fourier del *espectro de potencias* $\mathcal{P}(k)$ que dicte la teoría cosmológica en cuestión. Su expresión es

$$\sigma_\Delta(R_M) \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{W}(kR_M) \mathcal{P}_0(k), \tag{11}$$

donde la función filtro $\mathcal{W}(kR_M)$ determina la escala R_M a la cual estamos tomando el promedio. Tomando las siguientes funciones,

$$\mathcal{P}(k) = \mathcal{P}_n \left(\frac{k}{k_n}\right)^{n_s - 1} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{W}(kR) = \exp\left(-\frac{kR}{2}\right). \tag{12}$$

(IV) Calcula $\sigma_\Delta(R_M)$ usando los valores $\mathcal{P}_n = 2.3 \times 10^{-9}$ y $k_n = 0.05 \mathrm{Mpc}^{-1}$ que indican el satélite WMAP. Asume un valor n_s arbitrario.

La escala R_M es la escala de comovimiento inversa al número de onda k_M. Dicha escala entra al horizonte cosmológico al tiempo t en que $R_M = 1/a(t)H(t)$. Como se mencionó anteriormente, el radio de Jeans de colapso gravitacional en un universo dominado por radiación es del orden del radio del horizonte cosmológico c/H. Esto justifica el argumento de que un ANP se forma al entrar en el horizonte cosmológico y tiene una masa asociada equivalente a la masa contenida en el horizonte cosmológico. ¿Cual es la expresión para esta masa en términos de H y ρ? y ¿en términos del factor de escala $a(t)$ (pero no de sus derivadas)?

(V) Prueba que, en la época de radiación se cumple la siguiente relación para la masa del horizonte cosmológico,

$$M_H \approx 10^{15} \left(\frac{t}{10^{-23} s}\right) \text{ g}. \tag{13}$$

Esta misma masa es la masa asociada a un ANP formado al tiempo t.

Ahora veremos cuanta masa puede haber en el universo en forma de estos AN-

Ps. La fracción de masa en forma de ANPs en unidades de densidad crítica la llamamos $\Omega_{\text{ANP}}(M)$. Esta cantidad corresponde a ANPs de masa M. La teoría Press-Schechter de formación de estructura indica que, en el momento de su formación la fracción de masa de ANPs de masa M está dada por

$$\Omega_{\text{ANP}}(M) = 2\int_{\Delta_{min}}^{\infty} \mathbb{P}\Delta(M)\, d\Delta(M) \tag{14}$$

Determina esta cantidad con la función dada en la ecuación (12), y con el límite inferior derivado para Δ_0.

Los agujeros negros primordiales se comportan en conjunto como polvo (un plasma sin colisiones cinéticas en el cual $p = 0$) de modo que en un fondo de radiación, el cociente $\Omega_{\text{ANP}}/\Omega_{\text{rad}}$ evoluciona con el tiempo. Considerando ANPs que se formaron al tiempo $t = 10^{-22}$, y tomando un modelo cosmológico donde $n_s = 1.3$ calcula Ω_{ANP} al tiempo de igualdad de materia y radiación. Porqué este valor sería el mismo que el valor de Ω_{ANP} en la época actual?

(VI) Finalmente, tomando en cuenta este último resultado, ¿Qué ingredientes requiere un modelo cosmológico para considerar ANPs como candidatos a materia oscura?

(2) Una estrella es un objeto gaseoso y suficiente masivo que puede considerarse (a primera aproximación) descrita por una métrica estática y esféricamente simétrica. De esta manera la métrica queda determinada por funciones $\lambda(r)$ y $\nu(r)$ que dependen de la coordenada radial r (cf. métrica de Schwarzschild) de la siguiente manera

$$ds^2 = e^{\nu}\, dt^2 - e^{\lambda}\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2, \tag{15}$$

en donde $d\Omega^2 := \sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2$.

(I) Muestra que si $\dot{[\ ]} := d[\ ]/dr$, entonces las ecuaciones de Einstein, junto con la ecuación (15) implican que

$$-e^{-\lambda}\nu'/r - \left(e^{-\lambda-1}\right)/r^2 = -8\pi p, \tag{16}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\nu''/2 - \nu'\lambda'/4 + \nu'^2/4 + \left(\nu' - \lambda'\right)/2r\right) = -8\pi p, \tag{17}$$

$$e^{-\lambda}\lambda'/r - \left(e^{-\lambda} - 1\right)/r^2 = 8\pi\rho. \tag{18}$$

(ii) Debido a que la divergencia covariante del tensor de energía–momento $T^{\mu\nu}$ es nula, muestra que

$$\frac{\partial T_1^1}{\partial r} + \frac{1}{2}\nu'\left(T_1^1 - T_4^4\right) + \frac{1}{r}\left(T_1^1 - T_2^2\right) = -\frac{1}{2}\nu'\left(p+\rho\right) - p'. \tag{19}$$

Esta ecuación expresa de manera matemática el hecho de que la presión en la dirección radial es balanceada.

(iii) Muestra que si la función $M(r)$ es tal que

$$M(r) := \frac{1}{2}\left[r\left(1 - e^{-\lambda}\right)\right], \tag{20}$$

entonces la ecuación (18) toma la forma

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \tag{21}$$

Compara esta ecuación con la ecuación correspondiente de balance hidrostático no–relativista. ¿Qué diferencias y similitudes encuentras entre estas dos ecuaciones? Explica el por qué la función $M(r)$ es proporcional a la masa contenida dentro del radio r y muestra que esta función tiende a la masa de la estrella contenida dentro de una esfera de radio r en el límite Newtoniano.

(iv) Con todo lo anterior muestra que la ecuación diferencial que satisface la presión $p(r)$ está dada por

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{1}{r}\frac{dp}{dr} = -\left(p+\rho\right)\left(4\pi p + \frac{M}{r^3}\right). \tag{22}$$

Esta ecuación puede resolverse con ayuda de la ecuación (21) y una ecuación de estado que relacione a la presión p con la densidad de energía ρ.

(v) Si consideramos que el objeto gaseoso es suficientemente masivo (i.e. $\gtrsim 100 M_\odot$) entonces la presión está dominada por la presión de los fotones que el mismo produce, es decir,

$$p = \frac{1}{3} e, \tag{23}$$

donde e es la densidad de energía interna del sistema. La densidad de energía ρ está dada por la densidad de energía ρ_n de los nucleones del gas mas la densidad de energía e de los fotones, es decir,

$$\rho = \rho_n + e. \tag{24}$$

Estas energías están determinadas por

$$e = aT^4, \qquad \rho_n = a\tau T^3, \tag{25}$$

en donde T es la temperatura y a es la constante de densidad de radiación. El parámetro τ está relacionado a la entropía por barión de la estrella.

Redefine una nueva temperatura $\theta := T/\tau$ y unas unidades nuevas de tal forma que $8\pi m_n a \tau^4 = 1$, con m_n la masa promedio por nucleón y muestra que estas ecuaciones se reducen a

$$\rho = a\tau^4 \left(t^4 + t^3 \right), \tag{26}$$

$$p = a\tau^4 \left(\frac{1}{3} t^4 \right), \tag{27}$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2} \left(t^4 + t^3 \right) r^2, \tag{28}$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{r}{2} \left(\frac{3}{4} + t \right) \left(\frac{1}{3} t^4 + \frac{2m}{r^3} \right) \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}. \tag{29}$$

Estas ecuaciones diferenciales para $t(r)$ y $m(r)$ satisfacen las condiciones de frontera dadas por

$$m(r = 0) = 0, \qquad t(r = 0) = t_{\mathrm{central}} \tag{30}$$

(VI) Muestra que la presión y la densidad de masa ρ satisfacen una ecuación tipo balance hidrostático dada por

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2}\rho. \tag{31}$$

(VII) Con todo esto muestra que

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \tag{32}$$

$$e^{\nu(R)} = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \tag{33}$$

(VIII) Imagina ahora que el gas de la estrella es un polítropo de tal manera que

$$P = K\rho_g^{1+1/n}, \qquad \epsilon = \rho_g + nP, \tag{34}$$

con K una constante.

(IX) Define el parametro

$$\alpha := K\rho_{gc}^{1/n} = \frac{P_c}{\rho_{gc}} = \frac{\text{Presión central}}{\text{Densidad de energía en reposo central}} \tag{35}$$

donde el subíndice "c" se refiere al valor central. Introduzcamos también las variables ξ, θ, v de tal forma que:

$$r = \xi/A, \qquad \text{en donde} \qquad A^2 = \frac{4\pi\rho_{gc}}{(n+1)\,\alpha}, \tag{36}$$

$$\rho_g = \rho_{gc}\theta^n, \qquad M(r) = \frac{4\pi\rho_{gc}}{A^3}v(\xi). \tag{37}$$

Muestra entonces que las ecuaciones de equilibrio hidrostático se convierten en algo parecido a las ecuaciones de Lane-Emden, en este caso dadas por:

$$\frac{1-2(n+1)\alpha v/\xi}{1+(n+1)\alpha\theta}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} + v + \alpha\xi^3\theta^{n+1} = 0, \tag{38}$$

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2\theta^n(1+n\alpha\theta). \tag{39}$$

Demuestra finalmente que en el límite de campo débil estas relaciones se convierten en las famosas relaciones de Lane-Emden. Además, muestra que las condiciones de frontera a estas ecuaciones diferenciales son tales que $\theta(0) = 1$ y que $v(0) = 0$. La frontera de la nube corresponde al primer cero de $\xi(\theta) := \xi_1$ y corresponde a una masa con valor $v(\xi_1)$.

(x) Muestra que uno puede encontrar ciertas "relaciones de escala" tales que

$$r = R^* \alpha^{(1-n)/2} \xi, \qquad R = R^* \alpha^{(1-n)/2} \xi_1, \tag{40}$$

$$M(r) = M^* \alpha^{(3-n)/2} v(\xi), \qquad M = M^* \alpha^{(3-n)/2} v(xi_1), \tag{41}$$

en donde

$$\begin{aligned} R^* &:= (4\pi)^{-1/2} (n+1)^{1/2} K^{n/2} c^{1-n}, \\ M^* &:= (4\pi)^{-1/2} (n+1)^{3/2} K^{n/2} \end{aligned} \tag{42}$$

(3) Considera un universo como en el que vivimos actualmente y por lo tanto el principio cosmológico es válido. En este ejercicio las unidades se escogen de tal manera que $8\pi G = c = 1$. Imagina que la acción S del campo gravitacional está dada por

$$S = -m \int ds - \int f(R) \sqrt{-g}\, d\Omega + \int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega, \tag{43}$$

En donde Λ está relacionada con el tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ mediante la relación

$$\frac{1}{2} T_{\mu\nu} = \frac{\partial \sqrt{-g}\, \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \sqrt{-g}\, \Lambda}{\partial \left(\partial g^{\mu\nu} / \partial x^\alpha \right)}, \tag{44}$$

y la función $f(R)$ es una función arbitraria del escalar de Ricci R.

(I) Explica el por qué la ecuación (44) es la forma más general de escribir la acción para un campo gravitacional.

Las ecuaciones de campo que se obtienen directamente de la variación δS en la relación (44) están dadas por (¡NO intentes demostrarlas para el examen! pero diviertete en vacaciones haciéndolo...)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T^{\text{curv}}_{\mu\nu} + T^{\text{mat}}_{\mu\nu} / f'(R), \tag{45}$$

en donde el tensor $T^{\text{mat}}_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía–momento estándard asociado a la materia y el tensor (de energía–momento) $T^{\text{curv}}_{\alpha\beta}$ asociado a curvatura está definido por

$$T^{\text{curv}}_{\alpha\beta} := \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \left[f(R) - R f'(R) \right] + f'(R)^{;\mu\nu} \left(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) \right\}, \tag{46}$$

Nota que la ecuación (45) converge a las ecuaciones de Einstein cuando $f(R) = R$. Utilizando la métrica de Robertson–Walker en las ecuaciones de campo se obtienen las ecuaciones de Friedmann modificadas para $f(R)$:

$$\dot{\rho}_{\text{tot}} + 3H(\rho_{\text{tot}} + p_{\text{tot}}) = 0, \tag{47}$$

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3} \left[\rho_{\text{curv}} + \frac{\rho_m}{f'(R)} \right], \tag{48}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} = -\left(p_{\text{curv}} + p_m \right), \tag{49}$$

en donde $a(t)$ representa el factor de escala, $H(t)$ la constante de Hubble, $\dot{[]} := d/dt$, $\rho_{\text{tot}} := \rho_{\text{mat}}/f'(R) + \rho_{\text{curv}}$ y $p_{\text{tot}} := p_{\text{mat}}/f'(R) + p_{\text{curv}}$ con

$$\rho_{\text{curv}} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} \left[f(R) - R f'(R) \right] - 3H\dot{R} f''(R) \right\}, \tag{50}$$

$$p_{\text{curv}} = w_{\text{curv}} \rho_{\text{curv}}, \tag{51}$$

$$w_{\text{curv}} = -1 + \frac{\ddot{R} f''(R) + \dot{R} \left[\dot{R} f'''(R) - H f''(R) \right]}{\left[f(R) - R f'(R) \right]/2 - 3H\dot{R} f''(R)}. \tag{52}$$

Nota que de esta manera se puede pensar al universo como un fluido asociado a materia bariónica y otro asociado a efectos de curvatura. Es natural suponer que ambos fluidos no interaccionan entre si. El insertar la métrica de Robertson–Walker en la ecuación (45) impone también una condición sobre el escalar de curvatura R en función del factor de escala dada por

$$R = -6 \left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2} \right). \tag{53}$$

(II) Muestra que en la época presente, como la curvatura $\kappa = 0$ y el universo es de polvo, i.e. $p_{mat} = 0$, entonces

$$\dot{\rho}_{curv} + 3H(1 + w_{curv})\rho_{curv} = -\frac{1}{f'(R)}(\dot{\rho}_m + 3H\rho_m) - \rho_m \frac{df'(R)}{dt} \ . \tag{54}$$

De aquí y utilizando la conservación de masa muestra que

$$\dot{\rho}_{curv} + 3H(1 + w_{curv})\rho_{curv} = 3H_0^2 \Omega_M (1+z)^3 \times \ \frac{\dot{R} f''(R)}{[f'(R)]^2} \ . \tag{55}$$

en donde Ω_M es el parámetro de densidad de masa (cf. examen de clase).

(III) Utilizando las ecuaciones (48) y (49) muestra que

$$\dot{H} + \frac{1}{2}\left[\frac{\rho_m}{f'(R)} + (1 + w_{curv})\rho_{curv}\right] = 0,$$

para así obtener

$$\dot{H} = -\frac{1}{2f'(R)}\left\{3H_0^2\Omega_M(1+z)^3 + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}\left[\dot{R}f'''(R) - Hf''(R)\right]\right\} \ . \tag{56}$$

(IV) Muestra que $d/dt = -(1+z)H d/dz$ para así concluir que la ecuación (56) toma la forma

$$\mathcal{H}_3(z)\frac{d^3 f}{dz^3} + \mathcal{H}_2(z)\frac{d^2 f}{dz^2} + \mathcal{H}_1(z)\frac{df}{dz} = -3H_0^2\Omega_M(1+z)^3 \tag{57}$$

con:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 =& \dot{R}^2\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-4}\left[3\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-1}\left(\frac{d^2R}{dz^2}\right)^2 - \frac{d^3R}{dz^3}\right] - \left(\ddot{R} - \dot{R}H\right)\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-3}\frac{d^2R}{dz^2} - \\ & -2(1+z)H\frac{dH}{dz}\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-1},\end{aligned} \tag{58}$$

$$\mathcal{H}_2 = \left(\ddot{R} - \dot{R}H\right)\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-2} - 3\dot{R}^2\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-4}\frac{d^2R}{dz^2}, \tag{59}$$

$$\mathcal{H}_3 = \dot{R}^2\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-3} . \tag{60}$$

(v) Muestra con ayuda de la ecuación (53) que

$$\frac{dR}{dz} = -6\left\{-(1+z)\left(\frac{dH}{dz}\right)^2 + H\left[3\frac{dH}{dz} - (1+z)\frac{d^2H}{dz^2}\right]\right\}, \tag{61}$$

$$\ddot{R} - \dot{R}H = 6(1+z)H^2\left\{3(1+z)^2\frac{dH}{dz}\frac{d^2H}{dz^2} + H\left[(1+z)^2\frac{d^3H}{dz^3} - 6\frac{dH}{dz}\right]\right\}. \tag{62}$$

Para conocer el valor de la función $f(R)$ cosmológica que funciona como energía oscura, basta con sustituir las ecuaciones (61)-(62) en la ecuación (57) para así obtener una ecuación diferencial para $f(R(z))$ en función de la forma observacional que tenga la constante de Hubble $H(z)$.