Astrofísica Relativista
Examen

Sergio Mendoza <sergio@mendozza.org>
http://www.mendozza.org/sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Enero 14, 2011

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. Forzosamente debes contestar las preguntas número (1) y (2). Para el examen utiliza la siguiente notación: índices latinos toman valores 1,2,3 y los griegos 0,1,2,3, G la constante de gravitación de Newton y c la velocidad de la luz en el vacio. En todos tus cálculos enfatiza la física y explica, ¡dí no a las matemáticas sin sentido!. Si por ejemplo el inciso (a) de alguna pregunta no puedes demostrarlo, pero necesitas el resultado del mismo para el (b), supon cierto (a) y continúa. Puedes utilizar las ecuaciones de la hoja de información SIN demostrarlas, pero cuando las utilices, haz referencia a las mismas. No utilices un resultado que hayamos visto en clase SIN ANTES demostrarlo. Todas las preguntas tienen el mismo peso. Argumentos inteligentes, eficacia y orden en tus respuestas son la clave para obtener una buena calificación. El examen tiene una duración de cuatro horas. ¡Buena Suerte! [†‡]

[†] El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación igual a cero en el curso y les calificaré con NA en el mismo.

[‡] Antes de comenzar a escribir tus respuestas, lee con calma el examen por completo. Esto ayudara a que tu mente sepa lo que tiene que resolver de antemano y comience a profundizar en todas las preguntas.

(1) Escribe un ensayo de por lo menos dos cuartillas sobre la gravitación de Einstein y su extensión métrica con teorías $f(R)$, donde R representa el escalar de Ricci. Utiliza las matemáticas necesarias (pero no muchas) y física, mucha física. El escrito debe por lo menos contener lo siguiente:

(·) Muestra como construir las ecuaciones de Einsten de manera aproximada, tal cual como lo hizo Einstein.

(·) Muestra y justifica el por que la acción de Hilbert tiene el escalar de Ricci dentro de la misma y explica su caracter invariante

(·) Justifica por que razón la primer extensión a la gravedad de Einstein viene dada por una teoría $f(R)$. Explica el por qué la introducción de Einstein de una constante cosmológica en la acción de Hilbert constituye la primer extensión métrica $f(R)$ en la gravitación.

(·) Muestra que cuando f es una función lineal entonces se recupera la relatividad general de Einstein.

(·) Explica en que aplicaciones de al astrofísica se puede utilizar la gravedad extendida $f(R)$ y ¿por qué parece una solución viable a diversos paradigmas de la astronomía?

(2) Considera una masa M puntual en el límite Newtoniano. Asume que la componente radial de la aceleración a que experimenta una partícula de prueba con masa m debido al campo gravitacional que produce la masa M está dado por

$$a = \begin{cases} -\frac{GM}{r^2} := a_N, & \text{cuando } GM/r^2 \gg a_0 \\ -a_0 \frac{(GM)^{1/2}}{r}, & \text{cuando } GM/r^2 \ll a_0, \end{cases} \tag{1}$$

en donde la constante de aceleración de Milgrom $a_0 \sim 10^{-10}\text{m/s}^2$ y r la distancia radial al origen donde se encuentra la masa M. Lo mas importante de la relación (1) es la introducción de la constante de Milgrom como una constante fundamental en el problema de gravitación.

(a) Muestra que cuando $a_N \ll a_0$ entonces las curvas de rotación en galaxias espirales se aplanan y tienden al valor de velocidad $v = G^{1/4}M^{1/4}a_0^{1/2}$, que se conoce como la relación Tully-Fisher.

De manera general y fundamental, si en un problema de gravitación Newtoniana es introducida la constante de Milgrom, entonces la aceleración a está descrita por los parámetros G, M, a_0 y r.

(b) Muestra con ayuda del teorema Π de Buckingham de análisis dimensional que la aceleración a está dada por:

$$a = a_0 \, g(x), \tag{2}$$

donde

$$x := l_M / r, \tag{3}$$

con

$$l_M := \left(\frac{GM}{a_0} \right)^{1/2}. \tag{4}$$

La escala de masa-longitud l_M es un parámetro fundamental del problema que aparece naturalmente con la introducción de una constante de aceleración al mismo. Esto significa que la gravedad es no-libre de escala, i.e. será modificada a medida que se tomen sistemas de masas M y tamaños r adecuados. En pocas palabras, a medida que x varie. De manera vectorial, las relaciones anteriores pueden generalizarse como:

$$\boldsymbol{a} = a_0 g(x) \boldsymbol{e}_a, \tag{5}$$

en donde el vector unitario $\boldsymbol{e}_a$ apunta en la dirección de la aceleración $\boldsymbol{a}$.

c) Muestra que una distribución de densidad de masa $\rho(\mathbf{r})$ satisface la siguiente relación:

$$x^2 \boldsymbol{e}_a = -\frac{G}{a_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, \rho(\mathbf{r}') dV'. \tag{6}$$

d) Considera el caso en el que $\rho(\mathbf{r}) = M\delta(\mathbf{r})$, donde δ es la función delta de Dirac y muestra que la forma vectorial dada por la ecuación (5) junto con la (6) llevan a la ecuación (2).

e) Considera que se tiene una distribución esféricamente simétrica de tal forma que la densidad ρ es una función de la coordenada radial r únicamente. Muestra con esto que $x^2 \boldsymbol{e}_a = -GM(r)\boldsymbol{e}_r/r^2$, donde $M(r)$ es la masa contenida dentro del cascarón con radio r y $\boldsymbol{e}_r$ es un vector unitario en la dirección de la coordenada radial.

f) Con los resultados del inciso anterior en simetría esférica muestra que si la función $g(x)$ es analítica, es decir, tiene una forma tal que

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n x^n. \tag{7}$$

entonces muestra que el teorema de Newton es válido, i.e. que la aceleración que experimenta una partícula al radio r en simetría esférica es como si toda la masa estuviera contenida en el centro de la configuración de manera puntual.

El caso relativista para una masa M puntual implica que el problema gravitacional está determinado por las constantes fundamentales G, a_0 y la velocidad de la luz c. La manera mas natural de extender la teoría gravitacional de Einstein es mediante la forma generalizada de la acción de Hilbert:

$$S_H = \frac{c^3}{16L_M^2 \pi G} \int f(\chi)\sqrt{g}\, d^4x, \tag{8}$$

en donde el escalar de Ricci adimencional

$$\chi := RL_M^2, \tag{9}$$

para el escalar de Ricci R. La función $f(\chi)$ es una función arbitraria y es tal que cuando $f(\chi) = \chi$, la gravedad relativista de Einstein es recuperada. La longitud L_M tiene que estar dada por los parametros fundamentales del problema.

(g) Muestra con argumentos dimensionales que con los parametros del problema c, a_0 y M pueden construirse dos longitudes fundamentales, a saber l_M y el radio gravitacional $r_g := GM/c^2$.

Postula que

$$L_M \propto l_M^{\alpha} r_g^{\beta}, \tag{10}$$

en donde los parametros por determinar α y β satisfacen la siguiente relación por coherencia dimensional:

$$\alpha + \beta = 1. \tag{11}$$

Las ecuaciones de Hilbert extendidas para una teoría métrica de gravitación $f(\chi)$ se obtienen al variar la acción de campo y la de materia y están dadas por

$$f'(\chi)\chi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(\chi) - L_M^2 \left\{\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Delta\right\} f'(\chi) = \frac{8\pi G L_M^2}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{12}$$

en donde $\Delta := \nabla_\lambda \nabla^\lambda$ es el operador de Laplace–Beltrami.

h) Muestra que cuando $f(\chi) = \chi$, la ecuación de campo (12) converge a las ecuaciones de Einstein.

i) Calcula la traza de la ecuación (12) y considera que la función $f(\chi) = \chi^b$. Resuelve la ecuación restante a orden de magnitud en simetría esférica (e.g. $\Delta \sim 1/r^2$ y muestra que si el escalar de Riccie $R \sim \kappa \sim R_c^{-2} \gg r$, en donde κ es la curvatura Gaussiana del espacio–tiempo y R_c es el radio de curvatura del mismo, entonces

$$3\left(\frac{L_M}{r}\right)^2 \chi^{b-1} \sim \frac{8\pi G L_M^2 \rho}{c^2}. \tag{13}$$

Considera ahora que $\rho(\mathbf{r}) \sim (4\pi/3)\, M$ y usa el hecho de que en el límite no–relativista $R \sim -\left(2/c^2\right) \nabla^2 \phi$, con ϕ el potencial escalar gravitacional que satisface $\mathbf{a} = -\nabla\phi$. Con esto muestra que la relación (13) converge en el límite no-relativista, i.e. cuando $c \to \infty$, a la segunda ecuación de la relación (1). Calcula los valores de las constantes α, β y b para que esta convergencia tenga sentido.

(3) Considera un universo isotrópico como el nuestro en donde el principio cosmológico es válido.

(a) Asume que el universo es tal que existe constante cosmológica, radiación y materia.

Define el parámetro de densidad $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ en donde el subíndice i se refiere a materia (M), radiación (R), curvatura (κ) y constante cosmológica (Λ). Para cada caso, este parámetro de densidad está definido respectivamente por

$$\Omega_{M_0} := \frac{8\pi G \rho_{M_0}}{3H_0^2}, \qquad \Omega_{R_0} := \frac{8\pi G \rho_{R_0}}{3H_0^2}, \tag{14}$$

$$\Omega_{\kappa_0} := -\frac{c^2}{a_0^2 H_0^2} = -\frac{c^2 \kappa}{H_0^2}, \qquad \Omega_{\Lambda_0} := \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \tag{15}$$

Muestra con esto que la constante de Hubble $H(t)$ definida para cualquier tiempo cósmico t, i.e. la velocidad de expansión del universo, satisface la relación

$$H^2(a) = H_0^2 \left\{ \frac{\Omega_{R_0}}{a^4} + \frac{\Omega_{M_0}}{a^3} + \frac{\Omega_{\kappa_0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda_0} \right\}. \tag{16}$$

Finalmente muestra con esto que

$$\Omega_{M_0} + \Omega_{\kappa_0} + \Omega_{\Lambda_0} = 1. \tag{17}$$

(b) Muestra que si a *cualquier* época en el universo se definen los parámetros

$$\Omega_M := \frac{8\pi G \rho}{3H^2}, \quad \Omega_\kappa := -\frac{\kappa c^2}{a^2 H^2}, \quad \Omega_R := \frac{8\pi G \rho}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H^2}, \tag{18}$$

entonces se cumple la relación

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda = 1, \tag{19}$$

para cualquier tiempo cósmico t. Muestra además que si se conoce H_0 de manera observacional, entonces se conoce directamente Λ y $\rho_M 0$ de las observaciones de Ω_{Λ_0} y Ω_{κ_0}. Si además $\kappa = 0$ muestra entonces que el valor de H_0 es entonces conocido. ¿Qué significado físico tiene esta última condición?

(c) Explica brevemente que es la energía oscura y como afecta la evolución del universo. ¿Por qué razón observacional fue propuesta? ¿Cuál es su ecuación de estado? También describe que es la materia oscura bariónica y no–bariónica. ¿Por qué razón observacional se cree que exista materia oscura en el universo? ¿Cómo afecta la existencia de materia oscura no–bariónica en el universo a la dinámica del mismo? Si no existe materia oscura en el universo, ¿Cómo pueden explicarse estas últimas observaciones?

(d) Considera la época temprana del universo y muestra que una constante cosmológica implica expansión exponencial en el universo. De manera alternativa, también para la misma época del universo considera el vacío y supon que no hay constante cosmológica, pero si una diferente gravedad $f(R)$ a esa época. Usa el hecho de que el escalar de Ricci para la métrica de FLRW está dado por:

$$R(t) = 6\left\{\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{a^2}\right\}, \tag{20}$$

y la traza de la ecuación de campo (12) para mostrar que si $f(R) = R^n$ entonces se obtiene un crecimiento exponencial, i.e. $a \propto e^t$ si $n = 2$. ¿Qué puedes concluir de estas dos visiones?

(e) Define y explica el corrimiento al rojo z aplicado a la recesión de galaxias en el universo. De aquí muestra la ley de Hubble $v = H_0 r$, donde v es la velocidad de recesión de una galaxia, r su distancia y H_0 es la constante de Hubble. ¿Por qué razón la constante de Hubble no es una "verdadera" constante?

(f) La ecuación de estado (presión p como función de la densidad de energía e o densidad de masa ρ) para la energía oscura en el universo está dada por:

$$p_X = \omega c^2 \rho_X, \tag{21}$$

done ω es una constante negativa menor a $-1/2$ (y muy probablemente ~ -1 de acuerdo a observaciones de las fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo en microondas). Muestra que:

$$\rho_X \propto a^{-3(1+\omega)}, \tag{22}$$

$$\rho_X/\rho_M \propto (1+z)^{3\omega}, \tag{23}$$

donde ρ_M es la densidad de masa y z es el corrimiento al rojo. Muestra que el parámetro de desaceleración está dado por:

$$q_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\omega\Omega_X \sim \frac{1}{2} + \omega \tag{24}$$

Explica con esto el por qué $\omega < -1/2$ implica una expansión acelerada. Muestra que la constante de Hubble $H(z)$ está dada por:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_X \exp\left\{3\int_0^z [1+\omega(x)]\, d\ln(1+x)\right\} \tag{25}$$

Muestra que para que el universo se recolapse es necesario que $\omega > -1/3$. ¿Qué deduces de esto?

(g) Muestra que el corrimiento al rojo z y el factor de escala $a(t)$ están relacionados mediante la fórmula

$$1+z = \frac{1}{a(t)}. \tag{26}$$

(4) Considera un agujero negro de Schwarzschild.

(a) Explica cual es su métrica y que significado tiene cada coordenada.

Cuando la electrodinámica cuántica es aplicada a un agujero negro, se obtiene que la entropía S (entropía de Beckenstein) y la temperatura T (temperatura de Hawking–Zeldovich) del mismo están dadas por

$$S = \frac{k_B\, c^3}{4\hbar G} A \tag{27}$$

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi\, k_B\, GM} \tag{28}$$

en donde $\hbar$ es la constante de Planck en unidades de 2π, k_B es la constante de Boltzman. La ecuación (27) representa el hecho de que el área A del horizonte de eventos de un agujero es directamente proporcional a la entropía S del mismo.

(a) Explica el significado físico de la temperatura de Hawking–Zeldovich, así como el por qué el hecho de que la entropía sea proporcional al área del agujero ayuda a que la segunda ley de la termodinámica no tenga alguna violación debido a efectos relativistas en la gravitación asociados a la existencia de horizontes de eventos en agujeros negros.

(b) Para un agujero de Schwarzschild, el área A del horizonte de eventos está dada por $A = 4\pi R^2$, donde R el radio de Schwarzschild. Muestra que a medida que la masa M del agujero es perdida mediante radiación de Hawking–Zeldovich, entonces el cambio en la entropía dS del mismo está dado por

$$dS = \frac{8\pi\, G\, k_B}{\hbar c} M dM. \tag{29}$$

(c) Considera un agujero negro de masa M que se traga un solo fotón de longitud de onda λ que tiene una energía $E = \hbar c/\lambda$. Muestra que el incremento de masa ΔM en el agujero debido a este proceso está dado por $\Delta M = \hbar/c\lambda$. Con esto muestra que el área del agujero se incrementa por

$$\frac{\Delta A}{A_P} = 16\pi \frac{R_S}{\lambda}, \tag{30}$$

en donde R_S es el radio de Schwarzschild y $A_P := \hbar G/c^3$ el área de Planck. Si el área de Planck es la unidad de área mas chica que hay en la naturaleza entonces cuando $\lambda \gtrsim R_S$ la ecuación (30) muestra que el incremento en área es menor al área de Planck. ¡Esto muestra que fotones con longitudes de onda $\gtrsim$ que el radio de Schwarzschild no pueden ser tragados por el agujero! Nota que el agujero es en todo momento macroscópico.

(d) Al igual que en el inciso anterior uno podría estar tentado a pensar que partículas con longitudes mayores a las del radio de Schwarzschild no deberían de ser tragadas por un agujero. Para esto considera que la partícula en cuestión está determinada por la longitud de onda de Compton $\lambda_C = \hbar/mc$ en donde m es la masa de la partícula cuántica en cuestión. Muestra que en este caso también obtienes una relación equivalente a la ecuación (30). El problema aquí es que la partícula tiene que considerarse como cuántica (microscópica) al igual que el agujero.

(e) Muestra que el calor Q está relacionado con la masa del agujero mediante la relación $dQ = TdS = c^2 dM$, y por lo tanto la energía en reposo que pierde el agujero al cambiar su masa desde M_1 hasta M_2 debido a la radiación de Hawking–Zeldovich está dado por $(M_2 - M_1)\,c^2 < 0$. Muestra también que si se integra TdS sobre toda la masa del agujero se obtiene que $Q = -Mc^2$. Esto sugiere que la energía total del agujero es radiada en forma de calor. De este argumento y usando la primera ley de la termodinámica ($dU = dQ - dW$, con U la energía interna del agujero y W el trabajo). Argumenta el por qué no se hace trabajo sobre el horizonte de eventos a medida que el volumen decrece y por lo tanto la presión evaluada en el horizonte de eventos es prácticamente nula y por lo tanto constante.

(f) Debido a que el proceso de pérdida de energía por radiación de Hawking–Zeldovich se lleva acabo a presión constante, entonces la pérdida de calor es tal que $dQ = Mc_p dT$, en donde c_p representa el calor específico a presión constante. Justifica esta relación y muestra que

$$dT = -\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G}\frac{dM}{M^2}, \tag{31}$$

para obtener

$$c_p = -\frac{8\pi k_B G}{\hbar c} M. \tag{32}$$

Explica el por qué el calor específico es una cantidad negativa (hint: muestra que cuando M decrece, T aumenta).

(g) Si suponemos que el espectro de emisión es tipo cuerpo negro, entonces la pérdida de energía por unidad de tiempo por unidad de área (el flujo F) ocurre mediante la ley de Stephan–Boltzman, es decir,

$$F = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \sigma T^4, \tag{33}$$

en donde $\sigma := \pi^2 k_B^4 / 60\hbar^3 c^2$ es la constante de Stephan–Boltzman y U es la energía interna del agujero. Muestra con esto que la variación de la masa como función del tiempo está dada por

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\hbar c^4}{15360\,\pi\,G^2}\frac{1}{M^2}, \tag{34}$$

y por lo tanto el tiempo t que tarda un agujero de Schwarzschild en evaporarse está dado por

$$t = \frac{5120\,\pi\,G^2}{\hbar\,c^4}M^3 \tag{35}$$

(h) Utiliza las ecuaciones de Euler–Lagrange (o de cualquier otra forma, por ejemplo utilizando las ecuaciones de Hamilton–Jacobi) y muestra que el momento angular $h = r^2\dot{\varphi}$ y la energía $\xi = (1 - r/r_S)\dot{t}$ de una partícula de prueba son cantidades conservadas. Aquí r_S es el radio de Schwarzschild y $\dot{[\,]}$ es la derivada con respecto al tiempo propio τ.

Hoja de información†

Métrica de Robertson–Walker:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= c^2dt^2 - a^2(t)\left\{dr^2 + \mathfrak{R}^2\sin^2(r/\mathfrak{R})d\Omega^2\right\}\\
ds^2 &= c^2dt^2 - a^2(t)\left\{\frac{dx^2}{1-kx^2} + x^2d\Omega^2\right\}, \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de Friedmann:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0. \qquad (37)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G a\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda a, \qquad (38)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{3}\Lambda a^2. \qquad (39)$$

Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{(1-\frac{2GM}{rc^2})} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (40)$$

Métrica de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist:

$$
\begin{aligned}
ds^2 =& \frac{(\Delta - a^2\sin^2\theta)dt^2}{\Sigma}c^2dt^2 - 2a\sin^2\theta\frac{r^2+a^2-\Delta}{\Sigma}dtd\varphi - \\
&- \frac{(r^2+a^2) - \Delta a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2, \qquad (41)
\end{aligned}
$$

en donde

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \qquad (42)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2GMr/c^2. \qquad (43)$$

† Puedes utilizar cualquier ecuación en esta página sin demostrarla.