Astrofísica Relativista
Examen–tarea

Sergio Mendoza <sergio@astroscu.unam.mx>
http://www.mendozza.org/sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Enero 14, 2011

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. En todos tus cálculos enfatiza la física y justifica extensamente todo lo que hagas. En particular, si utilizas tablas de integrales o algun "Computer Algebra System (CAS)" como maxima o Wolfram (en línea) para algo que de verdad no puedes resolver escribe la referencia. En todo el examen índices griegos toman valores 0,1,2,3 y los índices latinos toman valores 1,2,3. Las unidades han sido escogidas de tal manera que $G = c = 1$, i.e. se ha tomado un sistema de unidades *geometrodinámico*. Argumentos inteligentes, eficacia y orden en tus respuestas son la clave para obtener una buena calificación. Este examen debe ser entregado personalmente a mas tardar a las 13hrs del lunes 17 de enero de 2011 en la oficina 202 de Sergio Mendoza en el Instituto de Astronomía[†]. ¡Buena Suerte!

[†] El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación de CERO en TODO el curso y les calificaré con NA en el mismo

(1) Considera un universo como en el que vivimos actualmente y por lo tanto el principio cosmológico es válido. En este ejercicio las unidades se escogen de tal manera que $8\pi G = c = 1$. Imagina que la acción S del campo gravitacional está dada por

$$S = -m\int ds - \int f(R)\sqrt{-g}\,d^4x + \int \Lambda\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{1}$$

En donde Λ está relacionada con el tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ mediante la relación

$$\frac{1}{2}T_{\mu\nu} = \frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\left(\partial g^{\mu\nu}/\partial x^{\alpha}\right)}, \tag{2}$$

y la función $f(R)$ es una función arbitraria del escalar de Ricci R. Las ecuaciones de campo que se obtienen directamente de la variación δS en la relación (2) están dadas por la ecuación (12) del examen de clase. ¡NO intentes demostrarlas para el examen! pero diviertete en vacaciones haciéndolo).

(I) Muestra que la ecuación (12) del examen de clase en estas unidades y sin la introducción de L_M implican que las ecuaciones de campo pueden escribirse como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T^{\mathrm{curv}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu}/f'(R), \tag{3}$$

en donde el tensor $T^{\mathrm{mat}}_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía–momento estándard asociado a la materia y el tensor (de energía–momento) $T^{\mathrm{curv}}_{\alpha\beta}$ asociado a curvatura está definido por

$$T^{\mathrm{curv}}_{\alpha\beta} := \frac{1}{f'(R)}\left\{\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left[f(R) - Rf'(R)\right] + f'(R)^{;\mu\nu}\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\right)\right\}, \tag{4}$$

Verifica que la ecuación (3) converge a las ecuaciones de Einstein cuando $f(R) = R$.

Utilizando la métrica de Friedman-Lemaitre-Robertson–Walker (FLRW) en las ecuaciones de campo se obtienen las ecuaciones de Friedmann extendidas para $f(R)$:

$$\dot{\rho}_{tot} + 3H(\rho_{tot} + p_{tot}) = 0, \tag{5}$$

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3}\left[\rho_{curv} + \frac{\rho_m}{f'(R)}\right], \tag{6}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} = -\left(p_{curv} + p_m\right), \tag{7}$$

en donde $a(t)$ representa el factor de escala, $H(t)$ la constante de Hubble, $\dot{[]} := d/dt$, $\rho_{tot} := \rho_{mat}/f'(R) + \rho_{curv}$ y $p_{tot} := p_{mat}/f'(R) + p_{curv}$ con

$$\rho_{curv} = \frac{1}{f'(R)}\left\{\frac{1}{2}\left[f(R) - Rf'(R)\right] - 3H\dot{R}f''(R)\right\}, \tag{8}$$

$$p_{curv} = w_{curv}\rho_{curv}, \tag{9}$$

$$w_{curv} = -1 + \frac{\ddot{R}f''(R) + \dot{R}\left[\dot{R}f'''(R) - Hf''(R)\right]}{\left[f(R) - Rf'(R)\right]/2 - 3H\dot{R}f''(R)}. \tag{10}$$

Nota que de esta manera se puede pensar al universo como un fluido asociado a materia bariónica y otro asociado a efectos de curvatura. Es natural suponer que ambos fluidos no interaccionan entre si. El insertar la métrica de Robertson–Walker en la ecuación (3) impone también una condición sobre el escalar de curvatura R en función del factor de escala dada por

$$R = -6\left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2}\right). \tag{11}$$

(II) Muestra que en la época presente, como la curvatura $\kappa = 0$ y el universo es de polvo, i.e. $p_{mat} = 0$, entonces

$$\dot{\rho}_{curv} + 3H(1 + w_{curv})\rho_{curv} = -\frac{1}{f'(R)}(\dot{\rho}_m + 3H\rho_m) - \rho_m\frac{df'(R)}{dt}\ . \tag{12}$$

De aquí y utilizando la conservación de masa muestra que

$$\dot{\rho}_{curv} + 3H(1 + w_{curv})\rho_{curv} = 3H_0^2\Omega_M(1+z)^3 \times \frac{\dot{R}f''(R)}{\left[f'(R)\right]^2}\ . \tag{13}$$

en donde Ω_M es el parámetro de densidad de masa (cf. examen de clase).

(III) Utilizando las ecuaciones (6) y (7) muestra que

$$\dot{H} + \frac{1}{2}\left[\frac{\rho_m}{f'(R)} + (1 + w_{curv})\rho_{curv}\right] = 0,$$

para así obtener

$$\dot{H} = -\frac{1}{2f'(R)}\left\{3H_0^2\Omega_M(1+z)^3 + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}\left[\dot{R}f'''(R) - Hf''(R)\right]\right\} \,. \tag{14}$$

(IV) Muestra que $d/dt = -(1+z)Hd/dz$ para así concluir que la ecuación (14) toma la forma

$$\mathcal{H}_3(z)\frac{d^3f}{dz^3} + \mathcal{H}_2(z)\frac{d^2f}{dz^2} + \mathcal{H}_1(z)\frac{df}{dz} = -3H_0^2\Omega_M(1+z)^3 \tag{15}$$

con:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 =& \dot{R}^2\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-4}\left[3\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-1}\left(\frac{d^2R}{dz^2}\right)^2 - \frac{d^3R}{dz^3}\right] - \left(\ddot{R} - \dot{R}H\right)\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-3}\frac{d^2R}{dz^2} - \\ &-2(1+z)H\frac{dH}{dz}\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-1},\end{aligned} \tag{16}$$

$$\mathcal{H}_2 = \left(\ddot{R} - \dot{R}H\right)\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-2} - 3\dot{R}^2\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-4}\frac{d^2R}{dz^2}, \tag{17}$$

$$\mathcal{H}_3 = \dot{R}^2\left(\frac{dR}{dz}\right)^{-3}. \tag{18}$$

(V) Muestra con ayuda de la ecuación (11) que

$$\frac{dR}{dz} = -6\left\{-(1+z)\left(\frac{dH}{dz}\right)^2 + H\left[3\frac{dH}{dz} - (1+z)\frac{d^2H}{dz^2}\right]\right\}, \tag{19}$$

$$\ddot{R} - \dot{R}H = 6(1+z)H^2\left\{3(1+z)^2\frac{dH}{dz}\frac{d^2H}{dz^2} + H\left[(1+z)^2\frac{d^3H}{dz^3} - 6\frac{dH}{dz}\right]\right\}. \tag{20}$$

Para conocer el valor de la función $f(R)$ cosmológica que funciona como energía oscura, basta con sustituir las ecuaciones (19)-(20) en la ecuación (15) para así obtener una ecuación diferencial para $f(R(z))$ en función de la forma observacional que tenga la constante de Hubble $H(z)$.

(VI) Muestra que si $f(R) = R^n$ -ley de potencias, y que cuando $n = 3/2$ como lo demostraste en la segunda pregunta del examen en clase, entonces para la época actual, dominada por polvo y con curvatura negativa se obtiene una expansión acelerada en el universo actual. De hecho, el diagrama de Hubble puede explicarse con las observaciones actuales de manera muy precisa cuando $n = 3/2$.

(2) Consideremos el flujo de gas (acreción) que cae hacia una masa central m. La métrica del espacio tiempo producida por esta masa central es la métrica de Schwarzschild que en este caso toma la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (1 - 2m/r)\, dt - (1 - 2m/r)^{-1}\, dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{21}$$

Cuando las ecuaciones de la hidrodinámica se tienen que escribir en la presencia de un campo gravitacional significante hay que reemplazar algunas derivadas ordinarias en las ecuaciones de movimiento por derivadas covariantes. La ecuación de continuidad, la ecuación de Euler y la ecuación de conservación de la entropía se escriben respectivamente de la siguiente manera

$$n^\mu{}_{;\mu} = 0 \tag{22}$$

$$\omega u^\mu u_{\nu;\mu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu} - u_\nu u^\mu \frac{\partial p}{\partial x^\mu} \tag{23}$$

$$(\sigma u^\alpha)_{;\alpha} = 0. \tag{24}$$

Las dos últimas relaciones se obtienen de pedir que la divergencia generalizada del tensor de energía–momento $T_{\mu\nu}$ sea nula, es decir,

$$T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0. \tag{25}$$

(a) Muestra que a partir de la ecuación (25) se obtienen las ecuaciones (23) y (24). Demuestra adicionalmente la ecuación de continuidad (22).

(b) Muestra que en el caso de un flujo de acreción estacionario ($\partial/\partial t = 0$), la ecuación (22) y la ecuación (25) implican que

$$\left(u^0\right)^2 = \frac{1}{1-2m/r}\left(1+\frac{\vartheta^2}{1-2m/r}\right), \tag{26}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 n\vartheta\right) = 0, \tag{27}$$

$$\frac{d}{dr}\left\{r^2\left(e+p\right)\vartheta\sqrt{1-2m/r+\vartheta^2}\right\} = 0. \tag{28}$$

$$\vartheta\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{dp}{dr}\frac{1-2m/r+\vartheta^2}{e+p} - \frac{m}{r^2}, \tag{29}$$

en donde $\vartheta := u^1 = dr/ds$.

(30)

(c) Muestra con lo anterior que

$$\frac{1}{n^2}\left(e+p\right)^2\left(1-2\frac{m}{r}+\vartheta^2\right) = \text{ const } := E. \tag{31}$$

$$n\frac{de}{dn} - e - p = 0. \tag{32}$$

Compara la ecuación (32) con la la primera ley de la termodinámica. ¿Qué diferencias y similitudes observas?

(d) Muestra que la velocidad ϑ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{r}\left\{2\Omega^2 - \frac{m}{r\left(1-2m/r+\vartheta^2\right)}\right\} + \frac{d\vartheta}{\vartheta}\left\{\Omega^2 - \frac{\vartheta^2}{1-2m/r+\vartheta^2}\right\} = 0, \tag{33}$$

en donde

$$\Omega^2 := \frac{d\ln\left(e+p\right)}{d\ln n} - 1. \tag{34}$$

Si alguno de los factores dentro de las llaves de la ecuación (33) se anula, entonces las soluciones son multivaluadas para r o ϑ. Para que el flujo en acreción alcance el centro es necesario que la velocidad se incremente monotonicamente hacia el centro de la configuración. Muestra entonces que los puntos críticos están dados por

$$\vartheta_c^2 = m/2r_c, \qquad \Omega_c^2 = \frac{\vartheta^2}{1 - 3\vartheta_c^2}. \tag{35}$$

Finalmente muestra que el punto crítico se encuentra a un radio mayor al radio de Schwarzschild.

(e) Considera que el gas en acreción es un gas politrópico cuya ecuación de estado es $p \propto n^{\kappa} \propto nT$.

(I) Supongamos que $\kappa = 4/3$ y que la temperatura T_{∞} evaluada en infinito (en donde $\vartheta_{\infty} = 0$) es diferente de cero. Muestra entonces que

$$T_c \approx 2T_{\infty}, \qquad T_S \approx \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{m}{r_S}\right)^{2/3} T_{\infty}^{1/2}, \tag{36}$$

en donde T_S y T_c representan valores de la temperatura evaluados en el radio de Schwarzschild y en el punto crítico respectivamente. Para mostrar la segunda relación de la ecuación (36) asume que la temperatura T_S evaluada al radio de Schwarzschild es tal que $T_S \ll 1$.

(II) Considera que $\kappa = 5/3$ y muestra que

$$T_S \approx 0.3\left(\frac{m}{r_S}\right)^{4/3}, \qquad u_c^4 \approx \frac{20}{27} T_{\infty}. \tag{37}$$

(f) Una manera alternativa de llegar a la ecuacion (33) es la siguiente. En relatividad general se dice que un campo es estático si el cuerpor que produce el campo se encuentra fijo en el sistema de referencia en el cual el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ no depende de la componente temporal x^0. De esta manera, como ambas direcciones del tiempo son equivalntes entonces puede escogerse un sistema de referencia en el cual el intervalo ds no varie cuando se cambie el signo de x^0 y por lo tanto $g_{0\alpha} = 0$ para dicho campo. Muestra que cuando la tres velocidad del fluido es cero entonces la cuatro–velocidad $u^{\alpha} := dx^{\alpha}/ds$ satisface:

$$u^{\alpha} = 0, \qquad u^0 = 1/\sqrt{g_{00}}. \tag{38}$$

Define la velocidad $v^k = dx^k/d\tau$ y muestra que $v^k = dx^k/\sqrt{g_{00}}dx^0$. Con esto muestra que la cuatro velocidad u^μ es tal que

$$u^0 = \gamma/\sqrt{g_{00}}, \qquad y \qquad u^k = \gamma v^k, \tag{39}$$

con $\gamma^{-2} := 1 - v^2$. Con esto muestra que si el flujo es además adiabático entonces la componente temporal de la ecuación de Euler (ecuación (2) del examen en clase) puede simplificarse enormemente para dar:

$$\gamma \boldsymbol{v} \cdot \nabla \left(\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} \right) = 0, \tag{40}$$

y por lo tanto la ecuación de Bernoulli en relatividad general toma la forma

$$\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} = \text{const.} \tag{41}$$

sobre una línea de corriente.

(g) Muestra que en el límite de campo débil la ecuación (41) converge a la ecuación de Bernoulli en relatividad especial.

(h) Considera ahora un flujo simétricamente esférico que es acretado hacia un agujero negro de Schwarzschild. Muestra utilizando la ecuación de continuidad que

$$n u r^2 = \text{const.}, \tag{42}$$

en donde u es la componente radial de la cuatro velocidad u^μ. También muestra que

$$u_0 = \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2 \right)^{1/2}. \tag{43}$$

Con esto y utilizando la ecuación de Bernoulli (41) muestra que

$$\left(\frac{p + e}{n} \right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + u^2 \right) = \text{const.} \tag{44}$$

Las ecuaciones (42) y (44) representan las integrales de movimiento para un flujo de acreción con simetría esférica hacia un agujero negro de Schwarzschild. Con esto deriva directamente la relación (33).

(3) Una estrella es un objeto gaseoso y suficiente masivo que puede considerarse (a primera aproximación) descrita por una métrica estática y esféricamente simétrica. De esta manera la métrica queda determinada por funciones $\lambda(r)$ y $\nu(r)$ que dependen de la coordenada radial r (cf. métrica de Schwarzschild) de la siguiente manera

$$ds^2 = e^{\nu}\, dt^2 - e^{\lambda}\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2, \tag{45}$$

en donde $d\Omega^2 := \sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2$.

(I) Muestra que si $\dot{[\,]} := d[\,]/dr$, entonces las ecuaciones de Einstein, junto con la ecuación (45) implican que

$$-e^{-\lambda}\nu'/r - \left(e^{-\lambda-1}\right)/r^2 = -8\pi p, \tag{46}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\nu''/2 - \nu'\lambda'/4 + \nu'^2/4 + \left(\nu' - \lambda'\right)/2r\right) = -8\pi p, \tag{47}$$

$$e^{-\lambda}\lambda'/r - \left(e^{-\lambda} - 1\right)/r^2 = 8\pi\rho. \tag{48}$$

(II) Debido a que la divergencia covariante del tensor de energía–momento $T^{\mu\nu}$ es nula, muestra que

$$\frac{\partial T^1_1}{\partial r} + \frac{1}{2}\nu'\left(T^1_1 - T^4_4\right) + \frac{1}{r}\left(T^1_1 - T^2_2\right) = -\frac{1}{2}\nu'\left(p + \rho\right) - p'. \tag{49}$$

Esta ecuación expresa de manera matemática el hecho de que la presión en la dirección radial es balanceada.

(III) Muestra que si la función $M(r)$ es tal que

$$M(r) := \frac{1}{2}\left[r\left(1 - e^{-\lambda}\right)\right], \tag{50}$$

entonces la ecuación (48) toma la forma

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \tag{51}$$

Compara esta ecuación con la ecuación correspondiente de balance hidrostático no–relativista. ¿Qué diferencias y similitudes encuentras entre estas dos ecuaciones? Explica el por qué la función $M(r)$ es proporcional a la masa contenida dentro del radio r y muestra que esta función tiende a la masa de la estrella contenida dentro de una esfera de radio r en el límite Newtoniano.

(IV) Con todo lo anterior muestra que la ecuación diferencial que satisface la presión $p(r)$ está dada por

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} = -\left(p + \rho\right) \left(4\pi p + \frac{M}{r^3}\right). \tag{52}$$

Esta ecuación puede resolverse con ayuda de la ecuación (51) y una ecuación de estado que relacione a la presión p con la densidad de energía ρ.

(V) Si consideramos que el objeto gaseoso es suficientemente masivo (i.e. $\gtrsim 100 M_\odot$) entonces la presión está dominada por la presión de los fotones que el mismo produce, es decir,

$$p = \frac{1}{3} e, \tag{53}$$

donde e es la densidad de energía interna del sistema. La densidad de energía ρ está dada por la densidad de energía ρ_n de los nucleones del gas mas la densidad de energía e de los fotones, es decir,

$$\rho = \rho_n + e. \tag{54}$$

Estas energías están determinadas por

$$e = aT^4, \qquad \rho_n = a\tau T^3, \tag{55}$$

en donde T es la temperatura y a es la constante de densidad de radiación. El parámetro τ está relacionado a la entropía por barión de la estrella.
Redefine una nueva temperatura $\theta := T/\tau$ y unas unidades nuevas de tal forma que $8\pi m_n a \tau^4 = 1$, con m_n la masa promedio por nucleón y muestra que estas

ecuaciones se reducen a

$$\rho = a\tau^4 \left(t^4 + t^3\right), \tag{56}$$

$$p = a\tau^4 \left(\frac{1}{3}t^4\right), \tag{57}$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2}\left(t^4 + t^3\right) r^2, \tag{58}$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{r}{2}\left(\frac{3}{4} + t\right)\left(\frac{1}{3}t^4 + \frac{2m}{r^3}\right)\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \tag{59}$$

Estas ecuaciones diferenciales para $t(r)$ y $m(r)$ satisfacen las condiciones de frontera dadas por

$$m(r = 0) = 0, \qquad t(r = 0) = t_{\text{central}} \tag{60}$$

(vi) Muestra que la presión y la densidad de masa ρ satisfacen una ecuación tipo balance hidrostático dada por

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2}\rho. \tag{61}$$

(vii) Con todo esto muestra que

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \tag{62}$$

$$e^{\nu(R)} = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \tag{63}$$

(viii) Imagina ahora que el gas de la estrella es un polítropo de tal manera que

$$P = K\rho_g^{1+1/n}, \qquad \epsilon = \rho_g + nP, \tag{64}$$

con K una constante.

(ix) Define el parametro

$$\alpha := K\rho_{gc}^{1/n} = \frac{P_c}{\rho_{gc}} = \frac{\text{Presión central}}{\text{Densidad de energía en reposo central}} \tag{65}$$

donde el subíndice "c" se refiere al valor central. Introduzcamos también las variables ξ, θ, v de tal forma que:

$$r = \xi/A, \qquad \text{en donde} \qquad A^2 = \frac{4\pi\rho_{gc}}{(n+1)\,\alpha}, \tag{66}$$

$$\rho_g = \rho_{gc}\theta^n, \qquad M(r) = \frac{4\pi\rho_{gc}}{A^3}v(\xi). \tag{67}$$

Muestra entonces que las ecuaciones de equilibrio hidrostático se convierten en algo parecido a las ecuaciones de Lane-Emden, en este caso dadas por:

$$\frac{1-2(n+1)\alpha v/\xi}{1+(n+1)\alpha\theta}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} + v + \alpha\xi^3\theta^{n+1} = 0, \tag{68}$$

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2\theta^n(1+n\alpha\theta). \tag{69}$$

Demuestra finalmente que en el límite de campo débil estas relaciones se convierten en las famosas relaciones de Lane-Emden. Además, muestra que las condiciones de frontera a estas ecuaciones diferenciales son tales que $\theta(0) = 1$ y que $v(0) = 0$. La frontera de la nube corresponde al primer cero de $\xi(\theta) := \xi_1$ y corresponde a una masa con valor $v(\xi_1)$.

(x) Muestra que uno puede encontrar ciertas "relaciones de escala" tales que

$$r = R^*\alpha^{(1-n)/2}\xi, \qquad R = R^*\alpha^{(1-n)/2}\xi_1, \tag{70}$$

$$M(r) = M^*\alpha^{(3-n)/2}v(\xi), \qquad M = M^*\alpha^{(3-n)/2}v(xi_1), \tag{71}$$

en donde

$$R^* := (4\pi)^{-1/2}(n+1)^{1/2}K^{n/2}c^{1-n},$$
$$M^* := (4\pi)^{-1/2}(n+1)^{3/2}K^{n/2} \tag{72}$$