Astrofísica Relativista
Examen–tarea

Sergio Mendoza <sergio@mendozza.org>
`http://www.mendozza.org/sergio`
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Julio 19, 2013

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. En todos tus cálculos enfatiza la física y justifica extensamente todo lo que hagas. En particular, si utilizas tablas de integrales o algún "Computer Algebra System (CAS)" como maxima, Wolfram, matematica o maple para algo que de verdad no puedes resolver escribe la referencia. En todo el examen índices griegos toman valores 0,1,2,3 y los índices latinos toman valores 1,2,3. Argumentos inteligentes, eficacia y orden en tus respuestas son la clave para obtener una buena calificación. Este examen debe ser entregado personalmente a mas tardar a las 12hrs del lunes 22 de julio de 2013 en la oficina 202 de Sergio Mendoza en el Instituto de Astronomía[†]. ¡Buena Suerte!

[†] El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación de CERO en TODO el curso y les calificaré con NA en el mismo

(1) Considera un espacio-tiempo de Schwarzschild, generado por una masa puntual M.

(I) Muestra que la ecuación de movimiento para una partícula libre de masa m puede escribirse como:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2 - c^4}{c^2} + \frac{2\,GM}{r} - \frac{h_S^2}{r^2}\left(1 - \frac{2\,r_g}{r}\right), \tag{1}$$

en donde $r_g := GM/c^2$ es el radio gravitacional, así como la energía interna específica $\mathcal{E}$ y el momento angular específico h_S están dados respectivamente por:

$$\mathcal{E} = u_0 = c^2\left(1 - \frac{2\,r_g}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}, \qquad h_S = -u_\varphi = r^2\frac{d\varphi}{d\tau}. \tag{2}$$

en donde se ha definido la cuatro-velocidad como $u_\mu := dx_\mu/d\tau$ y por lo tanto $u_\mu u^\mu = c^2$.

Muestra además que en términos del tiempo t, la segunda relación en (2) y la ecuación (1) son respectivamente:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c^2}{\mathcal{E}}\left(1 - \frac{2\,r_g}{r}\right)\frac{h_S}{r^2}, \tag{3}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c^2}{\mathcal{E}}\left(1 - \frac{2\,r_g}{r}\right)\sqrt{2\,E_S + \frac{2\,GM}{r} - \frac{h_S^2}{r^2}\left(1 - \frac{2\,rg}{r}\right)}, \tag{4}$$

en donde la energía:

$$E_S := \frac{\mathcal{E}^2 - c^4}{2\,c^2}. \tag{5}$$

Demuestra que ésta definición de energía es perfecta para ser una energía bien definida en una descripción relativista debido a que en el límite no-relativista se obtiene:

$$E_S \xrightarrow[c\to\infty]{} E_N := \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{GM}{r}. \tag{6}$$

(II) Considera el límite de bajas energías en donde $\mathcal{E} \simeq c^2$ o equivalentemente $E_S \simeq 0$, y muestra que:

$$E_S \xrightarrow[c\to\infty]{} E_G := \frac{1}{2}\left[\frac{r^2 \dot{r}^2}{(r-2\,r_g)^2} + \frac{r^3 \dot{\varphi}^2}{r-2\,r_g}\right] - \frac{GM}{r}. \tag{7}$$

De aquí prueba que:

$$E_G = T + \Phi_G - \dot{r}\,\frac{\partial \Phi_G}{\partial \dot{r}} - \dot{\varphi}\,\frac{\partial \Phi_G}{\partial \dot{\varphi}}, \tag{8}$$

donde $T := \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)/2$ es la energía cinética por unidad de masa y Φ_G es un potencial generalizado Newtoniano dado por

$$\Phi_G(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = -\frac{GM}{r} - \left(\frac{2\,r_g}{r-2\,r_g}\right)\left[\left(\frac{r-r_g}{r-2\,r_g}\right)\dot{r}^2 + \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{2}\right]. \tag{9}$$

Definamos ahora el Lagrangiano:

$$L := T - \Phi_G = \frac{1}{2}\left[\frac{r^2 \dot{r}^2}{(r-2\,r_g)^2} + \frac{r^3 \dot{\varphi}^2}{r-2\,r_g}\right] + \frac{GM}{r}. \tag{10}$$

(III) Calcula las cantidades conservadas del Lagrangiano L y muestra que el momento angular está dado por:

$$h_G = r^3\dot{\varphi}/\left(r - 2r_g\right) \tag{11}$$

¿En que sentido son coherentes estas cantidades con las expectativas Newtonianas? Muestra además que:

$$\frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{2\,r_g}{r}\right)\sqrt{2\,E_G + \frac{2\,GM}{r} - \frac{h_G^2}{r^2}\left(1 - \frac{2\,r_g}{r}\right)}, \tag{12}$$

y comenta sobre similitudes, diferencias y coherencia con la ecuación (4).

Las ecuaciones (11) y (12) representan buenas aproximaciones (con un error $\lesssim 5\,\%$) a la solución exacta para el movimiento de una partícula masiva en un espacio-tiempo de Schwarzschild.

(IV) Calcula el valor de las cantidades $(\ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi})$ de una partícula de prueba con el Lagrangiano (10) y el que se obtiene con la acción $S_{\text{test}} = -mc \int_a^b ds$ con la métrica de Schwarzschild y explica sus similitudes y diferencias.

(V) Considera ahora movimiento de una partícula de prueba en órbita circular en donde $r = \text{const}$. Muestra que el momento angular y la energía específicos están dados respectivamente por:

$$h_G^c = \frac{\sqrt{GM}\, r}{\sqrt{r - 3\, r_g}}, \qquad E_G^c = -\frac{GM}{2\, r} \left(\frac{r - 4\, r_g}{r - 3\, r_g} \right), \tag{13}$$

Calcula con esto la mínima órbita estable, la órbita marginalmente amarrada (para la cual $E_G^c = 0$), la orbita marginalmente estable (en la cual se satisface que h_G^c y E_G^c son mínimos). Compara y discute sobre estos resultados y sus contrapartes obtenidos de manera exacta en relatividad general. Muestra que la frecuencia orbital angular de la órbita Ω_G está dada por:

$$\Omega_G = \sqrt{\frac{GM}{r - 3\, r_g}} \left(\frac{r - 2\, r_g}{r^2} \right). \tag{14}$$

Calcula el valor de esta frecuencia de manera exacta para la métrica de Schwarzschild y compara el resultado con la última ecuación. En qué porcentaje difieren?

(VI) Finalmente considera ahora rayos de luz que se mueven en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Sus trayectorias están generadas por geodésicas nulas (ver sección "Deflexión de la luz por objetos gravitacionales" en libro de Astrofísica relativista de S. Mendoza). ¿Podras calcular una ecuación de movimiento simplificada como hemos hecho para partículas materiales? ¿Qué diferencias y similitudes encontrarías con estos cálculos aproximados y las fórmulas exactas? Extiende tus respuestas en este punto tanto como puedas.

(2) En este ejercicio, $a(t)$ representa el factor de escala cosmológico, con lo cual $a_0 := a(t = t_0) = 1$. La constante de Milgrom está representada por: $\dashv_0$.

Considera la época de dominación de materia en nuestro universo, en donde el principio cosmológico es válido y en el que no existen entes oscuros. Tal como mostraste en el ejercicio (1) del examen de clase, una buena propuesta para extender la gravitación en sistemas cuyas masas y longitudes son suficientemente grandes consiste en elegir $f(\chi) = \chi^{3/2}$. Este problema muestra como es posible lograr que ésta forma de extender la graveda a escalas astrofisicamente grandes y cosmológicas sea capaz de explicar la expansión acelerada del universo en el universo actual, dominado por materia cuya curvatura espacial $\kappa = 0$. La acción de materia tiene su forma habitual:

$$S_{\mathrm{mat}} = -\frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g}\, dx^4, \tag{15}$$

y la acción de campo es:

$$S_f = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \frac{f(\chi)}{A_M} \sqrt{-g}\, d^4 x. \tag{16}$$

Nota que la "constante de acoplamiento" A_M ahora aparece dentro de la integral en la acción (16) debido a que como viste en el ejercicio (1) del examen a casa, esta constante es función de la masa M. A priori no sabríamos que masa poner para el caso del universo, sin embargo dado que la para el caso de un espacio-tiempo esféricamente simétrico la masa puntual M es toda la masa que interactúa causalmente con una partícula de prueba, al menos para el caso cosmológico podemos escogerla como tal. Es decir, escojamos la masa M como la masa que interactúa gravitacionalmente con un observador fundamental al tiempo cósmico t. De esta manera y por el principio cosmológico, ésta masa sólo depende del tiempo t y es tal que:

$$M = \int_0^{r_H} \rho\, r^2\, dr = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{c^3}{H^3}, \tag{17}$$

donde

$$r_H := \frac{c}{H(t)}, \tag{18}$$

es el radio de Hubble (la región causalmente conectada con un observador fundamental al tiempo cósmico t). Debido a que el contenido energético del universo es solo de polvo, entonces el tensor de energía-momento está dado por:

$$T_{00} = \rho c^2, \qquad T_{0k} = 0, \qquad T_{kl} = 0. \tag{19}$$

De esta manera, la traza $T := T^{\alpha}_{\ \alpha} = \rho c^2$ y la acción del campo gravitacional depende entonces tanto del escalar de Ricci adimensional χ como de la masa M o bien de la traza T. Así pues, la acción puede pensarse como una función $F(R,T) := f(\chi)/A_M$[†]. Las ecuaciones de campo que se obtienen al pedir que la variación nula con respecto de la métrica $g_{\mu\nu}$ de la acción total sea cero son:

$$\begin{gathered}\left(\frac{f_R}{A_M}\right) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2A_M} f\, g_{\mu\nu} + \left[g_{\mu\nu}\Delta - \Delta_\mu \Delta_\nu \right] \left(\frac{f_R}{A_M}\right) = \\ \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} - \left(\frac{f}{A_M}\right)_T \left[T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu} \right],\end{gathered} \tag{20}$$

con traza:

$$\frac{f_R\, R}{A_M} - \frac{2f}{A_M} + 3\Delta\left(\frac{f_R}{A_M}\right) = \frac{8\pi G}{c^4} T - \left(\frac{f}{A_M}\right)_T \left[T + \Theta \right]. \tag{21}$$

Los subíndices R y T se refieren a derivadas parciales con respecto a las cantidades en cuestión, es decir: $(\ )_R := \partial/\partial R$ y $()_T := \partial/\partial T$. De manera general, el tensor $\Theta_{\mu\nu}$ es tal que $\Theta_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} := g^{\alpha\beta} \delta T_{\alpha\beta}$, y para el caso de polvo resulta que:

$$\Theta_{\mu\nu} = -2T_{\mu\nu}. \tag{22}$$

(a) Muestra que las ecuaciones de campo pueden ser reescritas de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left\{ \left(1 + \frac{c^4}{8\pi G} F_T \right) \frac{T_{\mu\nu}}{F_R} + T^{\mathrm{curv}}_{\mu\nu} \right\}, \tag{23}$$

[†] Nota que esto hace que la idea original de Einstein de poner un signo de igual a curvatura de un lado y masa del otro sea mas complicada. Ahora en las ecuaciones de campo deberá aparecer masa-energía de cualquier lado del signo igual.

en $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y

$$T^{\text{curv}}_{\mu\nu} := \frac{c^4}{8\pi G F_R}\left[\left(\frac{1}{2}\left(F - RF_R\right) - \Delta F_R\right) g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu F_R\right], \tag{24}$$

representa un tensor de "*energía-momento*" de curvatura.

(b) Como $T_{00} = \rho c^2$, entonces podemos identificar $T_{00} := \rho_{\text{curv}} c^2$. De aquí muestra entonces que:

$$\rho_{\text{curv}} = \frac{c^2}{8\pi G F_R}\left[\frac{1}{2}\left(RF_R - F\right) - \frac{3H}{c^2}\frac{dF_R}{dt}\right], \tag{25}$$

Usando la métrica de FLRW con curvatura $\kappa = 0$, la componente 00 de las ecuaciones de campo puede escribirse fácilmente con ayuda de la ecuación (15) del examen como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\left(1 + \frac{c^4}{8\pi G}F_T\right)\frac{\rho}{F_R} + \rho_{\text{curv}}\right]. \tag{26}$$

Esta ecuación representa formalmente una "extensión" a la ecuación de Friedmann. La nulidad de la divergencia covariante del tensor de energía–momento implica la conservación de la masa y por lo tanto:

$$\dot{\rho} + 3H\rho = 0. \tag{27}$$

Utilizando los resultados del ejercicio (1) del examen, i.e. $A_M = \zeta^2 r_g l_M$ con el radio gravitacional $r_g := GM/c^2$, la masa-longitud $l_M := (GM/a_0)^{1/2}$, $\zeta := 2\sqrt{2}/9$ (esto último puede mostrarse pero requiere de trabajo detallado en perturbaciones), y $f(\chi) = \chi^b$ con $b = 3/2$:

(c) Muestra que:

$$A_M^{1/2} = \zeta \frac{\left(\frac{4}{3}\pi c^3 G\right)^{3/4}}{c\, a_0^{1/4}} \frac{\rho^{3/4}}{H^{9/4}}, \tag{28}$$

y que:

$$\frac{dF_R}{dt} = b(b-1)R^{b-1}A_M^{(b-1)}H\left[\frac{j-q-2}{1-q} + \frac{3}{2}\left(\beta + \frac{3}{\alpha}\right)\right], \tag{29}$$

$$\frac{dF_T}{dt} = \frac{3}{2}(b-1)\frac{R^b A_M^{b-1}}{\rho c^2}, \tag{30}$$

donde

$$q(t) := -\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2}H^{-2}, \quad \text{y} \quad j(t) := \frac{1}{a}\frac{d^3a}{dt^3}H^{-3}, \tag{31}$$

representan el parámetro de desaceleración y el "*jerk*" respectivamente.

(d) Asume que existen soluciones de tipo ley de potencias de tal manera que:

$$a(t) = a(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha}, \qquad \rho(t) = \rho_0\left(\frac{a}{a(t_0)}\right)^{\beta}, \tag{32}$$

para los índices desconocidos α y β.

(e) Muestra que la ecuación de Friedmann (26) puede escribirse como:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3\,Z\,F_R}, \tag{33}$$

donde función adimensional

$$Z := 1 + (b-1)\left[\frac{j-q-2}{1-q} - \frac{4\,(1-q)}{b} + \frac{3}{2}\left(\beta + \frac{3}{\alpha}\right)\right]. \tag{34}$$

(f) Muestra que en la época presente:

$$a_0 = \left[\frac{9}{4}\zeta^4\,(1-q_0)^2\,(bZ_0)^{2/(b-1)}\left(\Omega_{\text{mat}}^{(0)}\right)^{(3b-5)/(b-1)}\right]c\,H_0, \tag{35}$$

y argumenta que con esto se sigue que $a_0 \approx cH_0$. Este resultado es crucial pues muestra que existe hoy una coincidencia numérica entre a_0 y H_0, resultado conocido por muchos años y no entendido. Discute el por qué este resultado es una coincidencia solamente y no una implicación de que a_0 no es una constante fundamental de la naturaleza.

(g) Muestra con todo lo anterior la siguiente constricción entre los parámetros del problema:

$$\beta = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{9-5b}{3b-5}\right). \tag{36}$$

Ayudado por esta relación encuentra los valores de α y β y muestra que $q_0 < 0$, es decir, el universo se está acelerando. Puede mostrarse que esta propuesta reproduce de manera bastante buena las observaciones hechas con SNIa para el diagrama corrimiento al rojo - magnitud de Hubble.

(3) Para este problema las unidades han sido escogidas de tal manera que $G = c = 1$, i.e. se ha tomado un sistema de unidades *geometrodinámico*.

Una estrella es un objeto gaseoso y suficiente masivo que puede considerarse (a primera aproximación) descrita por una métrica estática y esféricamente simétrica. De esta manera la métrica queda determinada por funciones $\lambda(r)$ y $\nu(r)$ que dependen de la coordenada radial r (cf. métrica de Schwarzschild) de la siguiente manera

$$ds^2 = e^{\nu}\,dt^2 - e^{\lambda}\,dr^2 - r^2\,d\Omega^2, \tag{37}$$

en donde $d\Omega^2 := \sin^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2$.

(I) Muestra que si $\dot{[\,]} := d[\,]/dr$, entonces las ecuaciones de Einstein, junto con la ecuación (37) implican que

$$-e^{-\lambda}\nu'/r - \left(e^{-\lambda-1}\right)/r^2 = -8\pi p, \tag{38}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\nu''/2 - \nu'\lambda'/4 + \nu'^2/4 + \left(\nu' - \lambda'\right)/2r\right) = -8\pi p, \tag{39}$$

$$e^{-\lambda}\lambda'/r - \left(e^{-\lambda} - 1\right)/r^2 = 8\pi\rho. \tag{40}$$

(II) Debido a que la divergencia covariante del tensor de energía–momento $T^{\mu\nu}$ es nula, muestra que

$$\frac{\partial T^1_1}{\partial r} + \frac{1}{2}\nu'\left(T^1_1 - T^4_4\right) + \frac{1}{r}\left(T^1_1 - T^2_2\right) = -\frac{1}{2}\nu'\left(p+\rho\right) - p'. \tag{41}$$

Esta ecuación expresa de manera matemática el hecho de que la presión en la dirección radial es balanceada.

(III) Muestra que si la función $M(r)$ es tal que

$$M(r) := \frac{1}{2}\left[r\left(1 - e^{-\lambda}\right)\right], \tag{42}$$

entonces la ecuación (40) toma la forma

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \tag{43}$$

Compara esta ecuación con la ecuación correspondiente de balance hidrostático no–relativista. ¿Qué diferencias y similitudes encuentras entre estas dos ecuaciones? Explica el por qué la función $M(r)$ es proporcional a la masa contenida dentro del radio r y muestra que esta función tiende a la masa de la estrella contenida dentro de una esfera de radio r en el límite Newtoniano.

(IV) Con todo lo anterior muestra que la ecuación diferencial que satisface la presión $p(r)$ está dada por

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{1}{r}\frac{dp}{dr} = -\left(p + \rho\right)\left(4\pi p + \frac{M}{r^3}\right). \tag{44}$$

Esta ecuación puede resolverse con ayuda de la ecuación (43) y una ecuación de estado que relacione a la presión p con la densidad de energía ρ.

(V) Si consideramos que el objeto gaseoso es suficientemente masivo (i.e. $\gtrsim 100 M_\odot$) entonces la presión está dominada por la presión de los fotones que el mismo produce, es decir,

$$p = \frac{1}{3}e, \tag{45}$$

donde e es la densidad de energía interna del sistema. La densidad de energía ρ está dada por la densidad de energía ρ_n de los nucleones del gas mas la densidad de energía e de los fotones, es decir,

$$\rho = \rho_n + e. \tag{46}$$

Estas energías están determinadas por

$$e = aT^4, \qquad \rho_n = a\tau T^3, \tag{47}$$

en donde T es la temperatura y a es la constante de densidad de radiación. El parámetro τ está relacionado a la entropía por barión de la estrella.
Redefine una nueva temperatura $\theta := T/\tau$ y unas unidades nuevas de tal forma que $8\pi m_n a\tau^4 = 1$, con m_n la masa promedio por nucleón y muestra que estas ecuaciones se reducen a

$$\rho = a\tau^4 \left(t^4 + t^3\right), \tag{48}$$

$$p = a\tau^4 \left(\frac{1}{3}t^4\right), \tag{49}$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2}\left(t^4 + t^3\right) r^2, \tag{50}$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{r}{2}\left(\frac{3}{4} + t\right)\left(\frac{1}{3}t^4 + \frac{2m}{r^3}\right)\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \tag{51}$$

Estas ecuaciones diferenciales para $t(r)$ y $m(r)$ satisfacen las condiciones de frontera dadas por

$$m(r=0) = 0, \qquad t(r=0) = t_{\text{central}} \tag{52}$$

(VI) Muestra que la presión y la densidad de masa ρ satisfacen una ecuación tipo balance hidrostático dada por

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2}\rho. \tag{53}$$

(VII) Con todo esto muestra que

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \tag{54}$$

$$e^{\nu(R)} = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \tag{55}$$

(VIII) Imagina ahora que el gas de la estrella es un polítropo de tal manera que

$$P = K\rho_g^{1+1/n}, \qquad \epsilon = \rho_g + nP, \tag{56}$$

con K una constante.

(IX) Define el parámetro

$$\alpha := K\rho_{gc}^{1/n} = \frac{P_c}{\rho_{gc}} = \frac{\text{Presión central}}{\text{Densidad de energía en reposo central}} \tag{57}$$

donde el subíndice "c" se refiere al valor central. Introduzcamos también las variables ξ, θ, v de tal forma que:

$$r = \xi/A, \qquad \text{en donde} \qquad A^2 = \frac{4\pi\rho_{gc}}{(n+1)\,\alpha}, \tag{58}$$

$$\rho_g = \rho_{gc}\theta^n, \qquad M(r) = \frac{4\pi\rho_{gc}}{A^3}v(\xi). \tag{59}$$

Muestra entonces que las ecuaciones de equilibrio hidrostático se convierten en algo parecido a las ecuaciones de Lane-Emden, en este caso dadas por:

$$\frac{1-2(n+1)\alpha v/\xi}{1+(n+1)\alpha\theta}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} + v + \alpha\xi^3\theta^{n+1} = 0, \tag{60}$$

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2\theta^n(1+n\alpha\theta). \tag{61}$$

Demuestra finalmente que en el límite de campo débil estas relaciones se convierten en las famosas relaciones de Lane-Emden. Además, muestra que las condiciones de frontera a estas ecuaciones diferenciales son tales que $\theta(0) = 1$ y que $v(0) = 0$. La frontera de la nube corresponde al primer cero de $\xi(\theta) := \xi_1$ y corresponde a una masa con valor $v(\xi_1)$.

(X) Muestra que uno puede encontrar ciertas "relaciones de escala" tales que

$$r = R^*\alpha^{(1-n)/2}\xi, \qquad R = R^*\alpha^{(1-n)/2}\xi_1, \tag{62}$$

$$M(r) = M^*\alpha^{(3-n)/2}v(\xi), \qquad M = M^*\alpha^{(3-n)/2}v(xi_1), \tag{63}$$

en donde

$$
\begin{aligned}
R^* &:= (4\pi)^{-1/2}(n+1)^{1/2}K^{n/2}c^{1-n}, \\
M^* &:= (4\pi)^{-1/2}(n+1)^{3/2}K^{n/2}
\end{aligned}
\tag{64}
$$