

# Astrofísica Relativista

## Examen-tarea

Sergio Mendoza <sergio@mendoza.org>

<http://www.mendoza.org/sergio>

Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM

Ciudad de México, México.

Agosto 3, 2015

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. En todos tus cálculos enfatiza la física y justifica extensamente todo lo que hagas. En particular, si utilizas tablas de integrales o algún “Computer Algebra System (CAS)” como maxima, Wolfram, matematica o maple para algo que de verdad no puedes resolver escribe la referencia. En todo el examen índices griegos toman valores 0,1,2,3 y los índices latinos toman valores 1,2,3. Argumentos inteligentes, eficacia y orden en tus respuestas son la clave para obtener una buena calificación. Este examen debe ser entregado a mas tardar a las 12hrs del jueves 6 de agosto de 2015 en la oficina 202 de Sergio Mendoza en el Instituto de Astronomía<sup>†</sup>. ¡Buena Suerte!

---

<sup>†</sup>El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación de CERO en TODO el curso y les calificaré con NA en el mismo

(1) Considera un espacio-tiempo de Schwarzschild, generado por una masa puntual  $M$ .

(I) Muestra que la ecuación de movimiento para una partícula libre de masa  $m$  puede escribirse como:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2 - c^4}{c^2} + \frac{2GM}{r} - \frac{h_S^2}{r^2} \left(1 - \frac{2r_g}{r}\right), \quad (1)$$

en donde  $r_g := GM/c^2$  es el radio gravitacional, así como la energía interna específica  $\mathcal{E}$  y el momento angular específico  $h_S$  están dados respectivamente por:

$$\mathcal{E} = u_0 = c^2 \left(1 - \frac{2r_g}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad h_S = -u_\phi = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}. \quad (2)$$

en donde se ha definido la cuatro-velocidad como  $u_\mu := dx_\mu/d\tau$  y por lo tanto  $u_\mu u^\mu = c^2$ .

Muestra además que en términos del tiempo  $t$ , la segunda relación en (2) y la ecuación (1) son respectivamente:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \left(1 - \frac{2r_g}{r}\right) \frac{h_S}{r^2}, \quad (3)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \left(1 - \frac{2r_g}{r}\right) \sqrt{2E_S + \frac{2GM}{r} - \frac{h_S^2}{r^2} \left(1 - \frac{2r_g}{r}\right)}, \quad (4)$$

en donde la energía:

$$E_S := \frac{\mathcal{E}^2 - c^4}{2c^2}. \quad (5)$$

Demuestra que ésta definición de energía es perfecta para ser una energía bien definida en una descripción relativista debido a que en el límite no-relativista se obtiene:

$$E_S \xrightarrow{c \rightarrow \infty} E_N := \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2\right) - \frac{GM}{r}. \quad (6)$$

- (II) Considera el límite de bajas energías en donde  $\mathcal{E} \simeq c^2$  o equivalentemente  $E_S \simeq 0$ , y muestra que:

$$E_S \xrightarrow{c \rightarrow \infty} E_G := \frac{1}{2} \left[ \frac{r^2 \dot{r}^2}{(r - 2r_g)^2} + \frac{r^3 \dot{\phi}^2}{r - 2r_g} \right] - \frac{GM}{r}. \quad (7)$$

De aquí prueba que:

$$E_G = T + \Phi_G - \dot{r} \frac{\partial \Phi_G}{\partial \dot{r}} - \dot{\phi} \frac{\partial \Phi_G}{\partial \dot{\phi}}, \quad (8)$$

donde  $T := (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) / 2$  es la energía cinética por unidad de masa y  $\Phi_G$  es un potencial generalizado Newtoniano dado por

$$\Phi_G(r, \dot{r}, \dot{\phi}) = -\frac{GM}{r} - \left( \frac{2r_g}{r - 2r_g} \right) \left[ \left( \frac{r - r_g}{r - 2r_g} \right) \dot{r}^2 + \frac{r^2 \dot{\phi}^2}{2} \right]. \quad (9)$$

Definamos ahora el Lagrangiano:

$$L := T - \Phi_G = \frac{1}{2} \left[ \frac{r^2 \dot{r}^2}{(r - 2r_g)^2} + \frac{r^3 \dot{\phi}^2}{r - 2r_g} \right] + \frac{GM}{r}. \quad (10)$$

- (III) Calcula las cantidades conservadas del Lagrangiano L y muestra que el momento angular está dado por:

$$h_G = r^3 \dot{\phi} / (r - 2r_g) \quad (11)$$

¿En que sentido son coherentes estas cantidades con las expectativas Newtonianas? Muestra además que:

$$\frac{dr}{dt} = \left( 1 - \frac{2r_g}{r} \right) \sqrt{2E_G + \frac{2GM}{r} - \frac{h_G^2}{r^2} \left( 1 - \frac{2r_g}{r} \right)}, \quad (12)$$

y comenta sobre similitudes, diferencias y coherencia con la ecuación (4).

Las ecuaciones (11) y (12) representan buenas aproximaciones (con un error  $\lesssim 5\%$ ) a la solución exacta para el movimiento de una partícula masiva en un espacio-tiempo de Schwarzschild.

- (IV) Calcula el valor de las cantidades  $(\ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi})$  de una partícula de prueba con el Lagrangiano (10) y el que se obtiene con la acción  $S_{\text{test}} = -mc \int_a^b ds$  con la métrica de Schwarzschild y explica sus similitudes y diferencias.
- (V) Considera ahora movimiento de una partícula de prueba en órbita circular en donde  $r = \text{const.}$  Muestra que el momento angular y la energía específicos están dados respectivamente por:

$$h_G^c = \frac{\sqrt{GM} r}{\sqrt{r - 3r_g}}, \quad E_G^c = -\frac{GM}{2r} \left( \frac{r - 4r_g}{r - 3r_g} \right), \quad (13)$$

Calcula con esto la mínima órbita estable, la órbita marginalmente amarrada (para la cual  $E_G^c = 0$ ), la órbita marginalmente estable (en la cual se satisface que  $h_G^c$  y  $E_G^c$  son mínimos). Compara y discute sobre estos resultados y sus contrapartes obtenidos de manera exacta en relatividad general. Muestra que la frecuencia orbital angular de la órbita  $\Omega_G$  está dada por:

$$\Omega_G = \sqrt{\frac{GM}{r - 3r_g}} \left( \frac{r - 2r_g}{r^2} \right). \quad (14)$$

Calcula el valor de esta frecuencia de manera exacta para la métrica de Schwarzschild y compara el resultado con la última ecuación. En qué porcentaje difieren?

- (VI) Finalmente considera ahora rayos de luz que se mueven en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Sus trayectorias están generadas por geodésicas nulas (ver sección "Deflexión de la luz por objetos gravitacionales" en libro de Astrofísica relativista de S. Mendoza). ¿Podras calcular una ecuación de movimiento simplificada como hemos hecho para partículas materiales? ¿Qué diferencias y similitudes encontrarías con estos cálculos aproximados y las fórmulas exactas? Extiende tus respuestas en este punto tanto como puedas.
- (2) Considera un universo como en el que vivimos actualmente y por lo tanto el principio cosmológico es válido. En este ejercicio las unidades se escogen de tal manera que

$8\pi G = c = 1$ . Imagina que la acción  $S$  del campo gravitacional está dada por

$$S = -m \int ds - \int f(R) \sqrt{-g} d^4x + \int \Lambda \sqrt{-g} d^4x, \quad (15)$$

En donde  $\Lambda$  está relacionada con el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  mediante la relación

$$\frac{1}{2} T_{\mu\nu} = \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial (\partial g^{\mu\nu} / \partial x^\alpha)}, \quad (16)$$

y la función  $f(R)$  es una función arbitraria del escalar de Ricci  $R$ . Las ecuaciones de campo que se obtienen directamente de la variación  $\delta S$  en la relación (16) están dadas por la ecuación (12) del examen de clase. ¡NO intentes demostrarlas para el examen! pero diviertete en vacaciones haciéndolo).

- (I) Muestra que la ecuación (12) del examen de clase en estas unidades y sin la introducción de  $L_M$  implican que las ecuaciones de campo pueden escribirse como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{curv}} + T_{\mu\nu}^{\text{mat}} / f'(R), \quad (17)$$

en donde el tensor  $T_{\alpha\beta}^{\text{mat}}$  es el tensor de energía-momento estándar asociado a la materia y el tensor (de energía-momento)  $T_{\alpha\beta}^{\text{curv}}$  asociado a curvatura está definido por

$$T_{\alpha\beta}^{\text{curv}} := \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} [f(R) - R f'(R)] + f'(R)^{;\mu\nu} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}) \right\}, \quad (18)$$

Verifica que la ecuación (17) converge a las ecuaciones de Einstein cuando  $f(R) = R$ .

Utilizando la métrica de Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) en las ecuaciones de campo se obtienen las ecuaciones de Friedmann extendidas para  $f(R)$ :

$$\dot{\rho}_{\text{tot}} + 3H(\rho_{\text{tot}} + p_{\text{tot}}) = 0, \quad (19)$$

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3} \left[ \rho_{\text{curv}} + \frac{\rho_m}{f'(R)} \right], \quad (20)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} = - (p_{\text{curv}} + p_m), \quad (21)$$

en donde  $a(t)$  representa el factor de escala,  $H(t)$  la constante de Hubble,  $\dot{\phantom{x}} := d/dt$ ,  $\rho_{\text{tot}} := \rho_{\text{mat}}/f'(R) + \rho_{\text{curv}}$  y  $p_{\text{tot}} := p_{\text{mat}}/f'(R) + p_{\text{curv}}$  con

$$\rho_{\text{curv}} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ \frac{1}{2} [f(R) - Rf'(R)] - 3H\dot{R}f''(R) \right\}, \quad (22)$$

$$p_{\text{curv}} = w_{\text{curv}}\rho_{\text{curv}}, \quad (23)$$

$$w_{\text{curv}} = -1 + \frac{\ddot{R}f''(R) + \dot{R} [\dot{R}f'''(R) - Hf''(R)]}{[f(R) - Rf'(R)]/2 - 3H\dot{R}f''(R)}. \quad (24)$$

Nota que de esta manera se puede pensar al universo como un fluido asociado a materia bariónica y otro asociado a efectos de curvatura. Es natural suponer que ambos fluidos no interaccionan entre si. El insertar la métrica de Robertson-Walker en la ecuación (17) impone también una condición sobre el escalar de curvatura  $R$  en función del factor de escala dada por

$$R = -6 \left( \dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2} \right). \quad (25)$$

(II) Muestra que en la época presente, como la curvatura  $\kappa = 0$  y el universo es de polvo, i.e.  $p_{\text{mat}} = 0$ , entonces

$$\dot{\rho}_{\text{curv}} + 3H(1 + w_{\text{curv}})\rho_{\text{curv}} = -\frac{1}{f'(R)}(\dot{\rho}_{\text{m}} + 3H\rho_{\text{m}}) - \rho_{\text{m}} \frac{df'(R)}{dt}. \quad (26)$$

De aquí y utilizando la conservación de masa muestra que

$$\dot{\rho}_{\text{curv}} + 3H(1 + w_{\text{curv}})\rho_{\text{curv}} = 3H_0^2 \Omega_M (1+z)^3 \times \frac{\dot{R}f''(R)}{[f'(R)]^2}. \quad (27)$$

en donde  $\Omega_M$  es el parámetro de densidad de masa (cf. examen de clase).

(III) Utilizando las ecuaciones (20) y (21) muestra que

$$\dot{H} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\rho_{\text{m}}}{f'(R)} + (1 + w_{\text{curv}})\rho_{\text{curv}} \right] = 0,$$

para así obtener

$$\dot{H} = -\frac{1}{2f'(R)} \left\{ 3H_0^2 \Omega_M (1+z)^3 + \ddot{R}f''(R) + \dot{R} \left[ \dot{R}f'''(R) - Hf''(R) \right] \right\}. \quad (28)$$

(iv) Muestra que  $d/dt = -(1+z)Hd/dz$  para así concluir que la ecuación (28) toma la forma

$$\mathcal{H}_3(z) \frac{d^3 f}{dz^3} + \mathcal{H}_2(z) \frac{d^2 f}{dz^2} + \mathcal{H}_1(z) \frac{df}{dz} = -3H_0^2 \Omega_M (1+z)^3 \quad (29)$$

con:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 = & \dot{R}^2 \left( \frac{dR}{dz} \right)^{-4} \left[ 3 \left( \frac{dR}{dz} \right)^{-1} \left( \frac{d^2 R}{dz^2} \right)^2 - \frac{d^3 R}{dz^3} \right] - (\ddot{R} - \dot{R}H) \left( \frac{dR}{dz} \right)^{-3} \frac{d^2 R}{dz^2} - \\ & - 2(1+z)H \frac{dH}{dz} \left( \frac{dR}{dz} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathcal{H}_2 = (\ddot{R} - \dot{R}H) \left( \frac{dR}{dz} \right)^{-2} - 3\dot{R}^2 \left( \frac{dR}{dz} \right)^{-4} \frac{d^2 R}{dz^2}, \quad (31)$$

$$\mathcal{H}_3 = \dot{R}^2 \left( \frac{dR}{dz} \right)^{-3}. \quad (32)$$

(v) Muestra con ayuda de la ecuación (25) que

$$\frac{dR}{dz} = -6 \left\{ -(1+z) \left( \frac{dH}{dz} \right)^2 + H \left[ 3 \frac{dH}{dz} - (1+z) \frac{d^2 H}{dz^2} \right] \right\}, \quad (33)$$

$$\ddot{R} - \dot{R}H = 6(1+z)H^2 \left\{ 3(1+z)^2 \frac{dH}{dz} \frac{d^2 H}{dz^2} + H \left[ (1+z)^2 \frac{d^3 H}{dz^3} - 6 \frac{dH}{dz} \right] \right\}. \quad (34)$$

Para conocer el valor de la función  $f(R)$  cosmológica que funciona como energía oscura, basta con sustituir las ecuaciones (33)-(34) en la ecuación (29) para así obtener una ecuación diferencial para  $f(R(z))$  en función de la forma observacional que tenga la constante de Hubble  $H(z)$ .

(VI) Muestra que si  $f(R) = R^n$  -ley de potencias, y que cuando  $n = 3/2$  como lo demostraste en la segunda pregunta del examen en clase, entonces para la época actual, dominada por polvo y con curvatura negativa se obtiene una expansión

acelerada en el universo actual. De hecho, el diagrama de Hubble puede explicarse con las observaciones actuales de manera muy precisa cuando  $n = 3/2$ .

- (3) Consideremos el flujo de gas (acreción) que cae hacia una masa central  $m$ . La métrica del espacio tiempo producida por esta masa central es la métrica de Schwarzschild que en este caso toma la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (1 - 2m/r) dt^2 - (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (35)$$

Cuando las ecuaciones de la hidrodinámica se tienen que escribir en la presencia de un campo gravitacional significativo hay que reemplazar algunas derivadas ordinarias en las ecuaciones de movimiento por derivadas covariantes. La ecuación de continuidad, la ecuación de Euler y la ecuación de conservación de la entropía se escriben respectivamente de la siguiente manera

$$n^\mu{}_{;\mu} = 0 \quad (36)$$

$$\omega u^\mu u_{\nu;\mu} = \frac{\partial p}{\partial x^\nu} - u_\nu u^\mu \frac{\partial p}{\partial x^\mu} \quad (37)$$

$$(\sigma u^\alpha)_{;\alpha} = 0. \quad (38)$$

Las dos últimas relaciones se obtienen de pedir que la divergencia generalizada del tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  sea nula, es decir,

$$T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0. \quad (39)$$

- (a) Muestra que a partir de la ecuación (39) se obtienen las ecuaciones (37) y (38). Demuestra adicionalmente la ecuación de continuidad (36).
- (b) Muestra que en el caso de un flujo de acreción estacionario ( $\partial/\partial t = 0$ ), la ecua-

ción (36) y la ecuación (39) implican que

$$(u^0)^2 = \frac{1}{1-2m/r} \left( 1 + \frac{\vartheta^2}{1-2m/r} \right), \quad (40)$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 n \vartheta) = 0, \quad (41)$$

$$\frac{d}{dr} \left\{ r^2 (e+p) \vartheta \sqrt{1-2m/r+\vartheta^2} \right\} = 0. \quad (42)$$

$$\vartheta \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{dp}{dr} \frac{1-2m/r+\vartheta^2}{e+p} - \frac{m}{r^2}, \quad (43)$$

en donde  $\vartheta := u^1 = dr/ds$ .

$$(44)$$

(c) Muestra con lo anterior que

$$\frac{1}{n^2} (e+p)^2 \left( 1 - 2\frac{m}{r} + \vartheta^2 \right) = \text{const} := E. \quad (45)$$

$$n \frac{de}{dn} - e - p = 0. \quad (46)$$

Compara la ecuación (46) con la primera ley de la termodinámica. ¿Qué diferencias y similitudes observas?

(d) Muestra que la velocidad  $\vartheta$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{r} \left\{ 2\Omega^2 - \frac{m}{r(1-2m/r+\vartheta^2)} \right\} + \frac{d\vartheta}{\vartheta} \left\{ \Omega^2 - \frac{\vartheta^2}{1-2m/r+\vartheta^2} \right\} = 0, \quad (47)$$

en donde

$$\Omega^2 := \frac{d \ln(e+p)}{d \ln n} - 1. \quad (48)$$

Si alguno de los factores dentro de las llaves de la ecuación (47) se anula, entonces las soluciones son multivaluadas para  $r$  o  $\vartheta$ . Para que el flujo en acreción alcance el centro es necesario que la velocidad se incremente monótonicamente hacia el centro de la configuración. Muestra entonces que los puntos críticos están dados por

$$\vartheta_c^2 = m/2r_c, \quad \Omega_c^2 = \frac{\vartheta^2}{1 - 3\vartheta_c^2}. \quad (49)$$

Finalmente muestra que el punto crítico se encuentra a un radio mayor al radio de Schwarzschild.

- (e) Considera que el gas en acreción es un gas politrópico cuya ecuación de estado es  $p \propto n^\kappa \propto nT$ .

- (I) Supongamos que  $\kappa = 4/3$  y que la temperatura  $T_\infty$  evaluada en infinito (en donde  $\vartheta_\infty = 0$ ) es diferente de cero. Muestra entonces que

$$T_c \approx 2T_\infty, \quad T_s \approx \frac{\sqrt{6}}{4} \left( \frac{m}{r_s} \right)^{2/3} T_\infty^{1/2}, \quad (50)$$

en donde  $T_s$  y  $T_c$  representan valores de la temperatura evaluados en el radio de Schwarzschild y en el punto crítico respectivamente. Para mostrar la segunda relación de la ecuación (50) asume que la temperatura  $T_s$  evaluada al radio de Schwarzschild es tal que  $T_s \ll 1$ .

- (II) Considera que  $\kappa = 5/3$  y muestra que

$$T_s \approx 0.3 \left( \frac{m}{r_s} \right)^{4/3}, \quad u_c^4 \approx \frac{20}{27} T_\infty. \quad (51)$$

- (f) Una manera alternativa de llegar a la ecuación (47) es la siguiente. En relatividad general se dice que un campo es estático si el cuerpo que produce el campo se encuentra fijo en el sistema de referencia en el cual el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  no depende de la componente temporal  $x^0$ . De esta manera, como ambas direcciones del tiempo son equivalentes entonces puede escogerse un sistema de referencia en el cual el intervalo  $ds$  no varíe cuando se cambie el signo de  $x^0$  y por lo tanto  $g_{0\alpha} = 0$  para dicho campo. Muestra que cuando la tres-velocidad del fluido es cero entonces la cuatro-velocidad  $u^\alpha := dx^\alpha/ds$  satisface:

$$u^\alpha = 0, \quad u^0 = 1/\sqrt{g_{00}}. \quad (52)$$

Define la velocidad  $v^k = dx^k/d\tau$  y muestra que  $v^k = dx^k/\sqrt{g_{00}}dx^0$ . Con esto

muestra que la cuatro velocidad  $u^\mu$  es tal que

$$u^0 = \gamma/\sqrt{g_{00}}, \quad \text{y} \quad u^k = \gamma v^k, \quad (53)$$

con  $\gamma^{-2} := 1 - v^2$ . Con esto muestra que si el flujo es además adiabático entonces la componente temporal de la ecuación de Euler (ecuación (2) del examen en clase) puede simplificarse enormemente para dar:

$$\gamma v \cdot \nabla \left( \frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} \right) = 0, \quad (54)$$

y por lo tanto la ecuación de Bernoulli en relatividad general toma la forma

$$\frac{w}{n} \gamma \sqrt{g_{00}} = \text{const.} \quad (55)$$

sobre una línea de corriente.

- (g) Muestra que en el límite de campo débil la ecuación (55) converge a la ecuación de Bernoulli en relatividad especial.
- (h) Considera ahora un flujo simétricamente esférico que es acretado hacia un agujero negro de Schwarzschild. Muestra utilizando la ecuación de continuidad que

$$n u r^2 = \text{const.}, \quad (56)$$

en donde  $u$  es la componente radial de la cuatro velocidad  $u^\mu$ . También muestra que

$$u_0 = \left( 1 - \frac{2M}{r} + u^2 \right)^{1/2}. \quad (57)$$

Con esto y utilizando la ecuación de Bernoulli (55) muestra que

$$\left( \frac{p + e}{n} \right)^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} + u^2 \right) = \text{const.} \quad (58)$$

Las ecuaciones (56) y (58) representan las integrales de movimiento para un flujo de acreción con simetría esférica hacia un agujero negro de Schwarzschild. Con esto deriva directamente la relación (47).