Astrofísica Relativista
Examen

Sergio Mendoza <sergio@mendozza.org>
http://www.mendozza.org/sergio
Instituto de Astronomía, AP 70-264 UNAM
Ciudad de México, México.

Enero 24, 2018

Contesta TANTAS preguntas como te sea posible. Para el examen utiliza la siguiente notación: índices latinos toman valores 1,2,3 y los griegos 0,1,2,3, G la constante de gravitación de Newton y c la velocidad de la luz en el vacío. En todos tus cálculos enfatiza la física y explica, ¡di no a las matemáticas sin sentido! Si por ejemplo el inciso (a) de alguna pregunta no puedes demostrarlo, pero necesitas el resultado del mismo para el (b), supón cierto (a) y continúa. Puedes utilizar las ecuaciones de la hoja de información SIN demostrarlas, pero cuando las utilices, haz referencia a las mismas. No utilices un resultado que hayamos visto en clase SIN ANTES demostrarlo. Todas las preguntas tienen el mismo peso. Argumentos inteligentes, eficacia y orden en tus respuestas son la clave para obtener una buena calificación. El examen tiene una duración de cuatro horas. ¡Buena Suerte! [†‡]

[†] El examen es individual. Aquellos que copien tendrán una calificación igual a cero en el curso y les calificaré con NA en el mismo.

[‡] Antes de comenzar a escribir tus respuestas, lee con calma el examen por completo. Esto ayudara a que tu mente sepa lo que tiene que resolver de antemano y comience a profundizar en todas las preguntas.

(1) Escribe un ensayo sobre relatividad general. Utiliza las matemáticas necesarias (pero no muchas) y física, mucha física. El escrito debe por lo menos contener lo siguiente. Muestra exactamente bajo que condiciones uno espera que los efectos de la relatividad especial sean observables en presencia de campos gravitacionales. Explica el principio de equivalencia y la equivalencia entre masa inercial y masa gravitacional. Argumenta por qué el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ corresponde a una cuadrática simétrica cuyo determinante es negativo y su componente temporal g_{00} es positiva y toma el valor $g_{00} = 1+2\phi/c^2$. Muestra el por qué es imposible (de manera general) sincronizar relojes en relatividad general y menciona la relación que existe entre el tensor métrico en tres dimensiones γ_{kl} y el tensor $g_{\mu\nu}$. Describe el significado de los símbolos de Christoffel y su importancia en el estudio de espacios curvos. ¿Qué significado tienen en relatividad general estos mismos? Explica el significado de una derivada covariante y el porque es necesaria su introducción en el estudio de espacios curvos. ¿Cómo se relaciona esta misma con la derivada ordinaria y por qué razón el tensor métrico es constante a diferenciación covariante? Menciona la importancia del tensor de Riemann en espacios curvos y explica la importancia del tensor y escalar de Ricci. Utilizando principios variacionales, explica y demuestra la ecuación geodésica, así como las ecuaciones de campo de Einstein. ¿Cuál es el significado geometrodinámico de las mismas? Mediante el uso de la ecuación de Poisson argumenta como las ecuaciones de Einstein pueden ser encontradas. Explica las caracteristicas de las ecuaciones de Einstein (con y sin constante cosmológica). ¿Por qué se introdujo la constante cosmológica? ¿Qué relación tiene la misma con el universo que nos rodea actualmente, así como en el pasado? Describe las propiedades matemáticas de las ecuaciones de campo como la superposición y el número de ecuaciones independientes utilizando sobre todo argumentos físicos. Finalmente comenta el por qué es posible modificar la gravitación mediante argumentos sobre la acción de curvatura. ¿Qué experimentos astronómicos nos han llevado a postular esta modificación?

(2) Considera una masa M puntual en el límite no-relativista.

(a) Cuando M es la masa del sol, entonces la velocidad v de los planetas alrededor del mismo es tal que (3ra ley de Kepler): $v \propto M^{1/2}/r^{1/2}$. Muestra de aquí que la aceleración experimentada por estos planetas es $a = -G_N M/r^2$, en donde G_N es la constante gravitacional de Newton.

(b) En las partes mas externas a galaxias espirales, elípticas, así como en cúmulos de globulares y de galaxias las velocidades (o dispersión de velocidades para objetos autogravitantes) obedecen la ley Tully-Fisher: $v \propto M^{1/4}$, donde M es la masa integrada hasta las partes mas lejanas del objeto astrofísico en cuestión. Muestra de aquí que la aceleración inferida es entonces $a = -G_N M^{1/2}/r$, y G_M es una constante modificada de gravitación. Reescribe ésta última relación como

$$a = -a_0 \frac{(GM)^{1/2}}{r}, \tag{1}$$

en donde la constante de Milgrom $a_0 \approx 10^{-10} \mathrm{m/s^2}$. Argumenta el por qué es lo mismo trabajar con a_0 en vez de G_M.

Considera ahora una partícula de prueba relativista para la cual su acción $S_{\text{test}} = -mc \int_a^b ds$.

(c) Muestra que en el límite no-relativista, cuando $c \to \infty$, y por lo tanto el Lagrangiano $L = mv^2/2 + m\phi$, se obtiene que:

$$g_{00} = 1 + 2\phi/c^2, \text{ y que } g_{ab} = -\delta_{ab}. \tag{2}$$

Imagina ahora que necesitas construir una teoría gravitacional relativista de tal manera que en el límite cuando $c \to \infty$ recuperes las expresiones gravitacionales obtenidas en los incisos (2a) y (2b). Si la acción de materia está dada por:

$$S_m = -\frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g}\, d^4x \tag{3}$$

y el escalar de Ricci es tal que:

$$R \to -\frac{2}{c^2} \nabla^2 \phi = \frac{2}{c^2} \nabla \mathbf{a}, \qquad \text{cuando} \qquad c \to \infty, \tag{4}$$

entonces:

(d) Argumenta el por qué la acción del campo gravitacional $S_g = \alpha \int d^4x \sqrt{-g}\, f(R)$, en donde f es una función arbitraria del escalar de Ricci y α una constante de acoplamiento.

(e) Para el caso de relatividad general de Einstein $f(R) = R$ y la constante de acoplamiento $\alpha = -c^3/16\pi G$. Por lo tanto la variación nula de la acción total $S = S_g + S_m$ con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ implica las ecuaciones de Einstein: $R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu}/2 = 8\pi G T_{\mu\nu}/c^4$. Toma la traza de las ecuaciones de Einstein, el límite no-relativista cuando $c \to \infty$ y a orden de magnitud (i.e. cuando $\nabla^2 \sim 1/r^2$, $\rho \sim M/r^3$) muestra que la magnitud de la aceleración producida en una partícula de prueba es justo la aceleración Newtoniana expresada en el inciso (2a).

La manera natural de construir unas ecuaciones de campo para los lugares lejanos (como las partes externas de las galaxias espirales) semejantes a los obtenidos en el inciso (2b) es utilizando una acción gravitacional tipo $f(R)$, pero dimensionalmente adecuada:

$$S_H = \frac{c^3}{16 A_M \pi G} \int f(\chi) \sqrt{g}\, d^4x, \tag{5}$$

en donde el escalar de Ricci adimensional:

$$\chi := R A_M, \tag{6}$$

y A_M es una constante de acoplamiento con dimensiones de área. La función $f(\chi)$ es una función arbitraria y es tal que cuando $f(\chi) = \chi$, la gravedad relativista de Einstein es recuperada. La longitud L_M tiene que estar dada por los parámetros fundamentales del problema. Las ecuaciones de campo extendidas para una teoría métrica de gravitación $f(\chi)$ se obtienen de las variaciones nulas de la acción de campo mas la de materia con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$, y están dadas por

$$f'(\chi)\chi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(\chi) - A_M \{\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Delta\} f'(\chi) = \frac{8\pi G A_M^2}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{7}$$

en donde $\Delta := \nabla_\lambda \nabla^\lambda$ es el operador de Laplace–Beltrami.

f) Muestra que cuando $f(\chi) = \chi$, la ecuación de campo (7) converge a las ecuaciones de Einstein.

g) Calcula la traza de la ecuación (7) y considera que la función $f(\chi) = \chi^b$. Resuelve la ecuación restante a orden de magnitud en simetría esférica (e.g. $\Delta \sim 1/r^2$ y $f'(\chi) \sim f(\chi)/\chi$) y muestra que si el escalar de Ricci $R \sim \kappa \sim R_c^{-2} \gg r^{-2}$, en donde κ es la curvatura Gaussiana del espacio–tiempo y R_c es el radio de curvatura del mismo, entonces

$$3\left(\frac{A_M}{r^2}\right)\chi^{b-1} \sim \frac{8\pi G L_M^2 \rho}{c^2}. \tag{8}$$

Nota que la condición $R_c >> r$ significa que la curvatura del espacio es pequeña, i.e. $\kappa << 1$, lo cual ocurre lejos de las fuentes que producen los campos gravitacionales, como en las regiones mas externas de las galaxias espirales.

Utilizando las las aproximaciones necesarias a orden de magnitud como en el inciso anterior, muestra que la relación (8) converge en el límite no-relativista, i.e. cuando $c \to \infty$, a la relación para la aceleración (1) del inciso 2b, escogiendo de manera adecuada la constante de acoplamiento A_M y la cantidad b . A orden de magnitud ¿qué valor deben tener la constantes A_M y b?

(3) Considera un universo isotrópico como el nuestro en donde el principio cosmológico es válido.

(a) Asume que el universo es tal que existe constante cosmológica, radiación y materia. Define el parámetro de densidad $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ en donde el subíndice i se refiere a materia (M), radiación (R), curvatura (κ) y constante cosmológica (Λ). Para cada caso, este parámetro de densidad está definido respectivamente por

$$\Omega_{M_0} := \frac{8\pi G \rho_{M_0}}{3H_0^2}, \qquad \Omega_{R_0} := \frac{8\pi G \rho_{R_0}}{3H_0^2}, \tag{9}$$

$$\Omega_{\kappa_0} := -\frac{c^2}{a_0^2 H_0^2} = -\frac{c^2 \kappa}{H_0^2}, \qquad \Omega_{\Lambda_0} := \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \tag{10}$$

Muestra con esto que la constante de Hubble $H(t)$ definida para cualquier tiempo cósmico t, i.e. la velocidad de expansión del universo, satisface la relación

$$H^2(a) = H_0^2 \left\{ \frac{\Omega_{R_0}}{a^4} + \frac{\Omega_{M_0}}{a^3} + \frac{\Omega_{\kappa_0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda_0} \right\}. \tag{11}$$

Finalmente muestra con esto que

$$\Omega_{M_0} + \Omega_{\kappa_0} + \Omega_{\Lambda_0} = 1. \tag{12}$$

(b) Muestra que si a *cualquier* época en el universo se definen los parámetros

$$\Omega_M := \frac{8\pi G\rho}{3H^2}, \quad \Omega_\kappa := -\frac{\kappa c^2}{a^2H^2}, \quad \Omega_R := \frac{8\pi G\rho}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H^2}, \tag{13}$$

entonces se cumple la relación

$$\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda = 1, \tag{14}$$

para cualquier tiempo cósmico t. Muestra además que si se conoce H_0 de manera observacional, entonces se conoce directamente Λ y $\rho_M 0$ de las observaciones de Ω_{Λ_0} y Ω_{κ_0}. Si además $\kappa = 0$ muestra entonces que el valor de H_0 es entonces conocido. ¿Qué significado físico tiene esta última condición?

(c) Considera la época temprana del universo y muestra que una constante cosmológica implica expansión exponencial en el universo. De manera alternativa, también para la misma época del universo considera el vacío y supón que no hay constante cosmológica, pero si una diferente gravedad $f(R)$ a esa época. Usa el hecho de que el escalar de Ricci para la métrica de FLRW está dado por:

$$R(t) = 6 \left\{ \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right\}, \tag{15}$$

y la traza de la ecuación de campo (7) para mostrar que si $f(R) = R^n$ entonces se obtiene un crecimiento exponencial, i.e. $a \propto e^t$ si $n = 2$. ¿Qué puedes concluir de estas dos visiones?

(d) Define y explica el corrimiento al rojo z aplicado a la recesión de galaxias en el universo. De aquí muestra la ley de Hubble $v = H_0 r$, donde v es la velocidad de recesión de una galaxia, r su distancia y H_0 es la constante de Hubble. ¿Por qué razón la constante de Hubble no es una "verdadera" constante?

(e) La ecuación de estado (presión p como función de la densidad de energía e o densidad de masa ρ) para la energía oscura en el universo está dada por:

$$p_X = \omega c^2 \rho_X, \tag{16}$$

done ω es una constante negativa menor a $-1/2$ (y muy probablemente ~ -1 de acuerdo a observaciones de las fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo en microondas). Muestra que:

$$\rho_X \propto a^{-3(1+\omega)}, \tag{17}$$

$$\rho_X/\rho_M \propto (1+z)^{3\omega}, \tag{18}$$

donde ρ_M es la densidad de masa y z es el corrimiento al rojo. Muestra que el parámetro de desaceleración está dado por:

$$q_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\omega\Omega_X \sim \frac{1}{2} + \omega \tag{19}$$

Explica con esto el por qué $\omega < -1/2$ implica una expansión acelerada. Muestra que la constante de Hubble $H(z)$ está dada por:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_X \exp\left\{3\int_0^z [1+\omega(x)]\, d\ln(1+x)\right\} \tag{20}$$

Muestra que para que el universo se recolapse es necesario que $\omega > -1/3$. ¿Qué deduces de esto?

(f) Muestra que el corrimiento al rojo z y el factor de escala $a(t)$ están relacionados mediante la fórmula

$$1 + z = \frac{1}{a(t)}. \tag{21}$$

(4) Considera un agujero negro de Schwarzschild.

(a) Explica cual es su métrica y que significado tiene cada coordenada.

Cuando la electrodinámica cuántica es aplicada a un agujero negro, se obtiene que la entropía S (entropía de Beckenstein) y la temperatura T (temperatura de Hawking–Zeldovich) del mismo están dadas por

$$S = \frac{k_B\, c^3}{4\hbar G} A \tag{22}$$

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi\, k_B\, G M} \tag{23}$$

en donde $\hbar$ es la constante de Planck en unidades de 2π, k_B es la constante de Boltzman. La ecuación (22) representa el hecho de que el área A del horizonte de eventos de un agujero es directamente proporcional a la entropía S del mismo.

(a) Explica el significado físico de la temperatura de Hawking–Zeldovich, así como el por qué el hecho de que la entropía sea proporcional al área del agujero ayuda a que la segunda ley de la termodinámica no tenga alguna violación debido a efectos relativistas en la gravitación asociados a la existencia de horizontes de eventos en agujeros negros.

(b) Para un agujero de Schwarzschild, el área A del horizonte de eventos está dada por $A = 4\pi R^2$, donde R el radio de Schwarzschild. Muestra que a medida que la masa M del agujero es perdida mediante radiación de Hawking–Zeldovich, entonces el cambio en la entropía dS del mismo está dado por

$$dS = \frac{8\pi\, G\, k_B}{\hbar c} M dM. \tag{24}$$

(c) Considera un agujero negro de masa M que se traga un solo fotón de longitud de onda λ que tiene una energía $E = \hbar c/\lambda$. Muestra que el incremento de masa ΔM en el agujero debido a este proceso está dado por $\Delta M = \hbar / c\lambda$. Con esto muestra que el área del agujero se incrementa por

$$\frac{\Delta A}{A_P} = 16\pi \frac{R_S}{\lambda}, \tag{25}$$

en donde R_S es el radio de Schwarzschild y $A_P := \hbar G/c^3$ el área de Planck. Si el área de Planck es la unidad de área mas chica que hay en la naturaleza entonces cuando $\lambda \gtrsim R_S$ la ecuación (25) muestra que el incremento en área es menor al área de Planck. ¡Esto muestra que fotones con longitudes de onda $\gtrsim$ que el radio de Schwarzschild no pueden ser tragados por el agujero! Nota que el agujero es en todo momento macroscópico.

(d) Al igual que en el inciso anterior uno podría estar tentado a pensar que partículas con longitudes mayores a las del radio de Schwarzschild no deberían de ser tragadas por un agujero. Para esto considera que la partícula en cuestión está determinada por la longitud de onda de Compton $\lambda_C = \hbar/mc$ en donde m es la masa de la partícula cuántica en cuestión. Muestra que en este caso también obtienes una relación equivalente a la ecuación (25). El problema aquí es que la partícula tiene que considerarse como cuántica (microscópica) al igual que el agujero.

(e) Muestra que el calor Q está relacionado con la masa del agujero mediante la relación $dQ = TdS = c^2 dM$, y por lo tanto la energía en reposo que pierde el agujero al cambiar su masa desde M_1 hasta M_2 debido a la radiación de Hawking–Zeldovich está dado por $(M_2 - M_1)\, c^2 < 0$. Muestra también que si se integra TdS sobre toda la masa del agujero se obtiene que $Q = -Mc^2$. Esto sugiere que la energía total del agujero es radiada en forma de calor. De este argumento y usando la primera ley de la termodinámica ($dU = dQ - dW$, con U la energía interna del agujero y W el trabajo). Argumenta el por qué no se hace trabajo sobre el horizonte de eventos a medida que el volumen decrece y por lo tanto la presión evaluada en el horizonte de eventos es prácticamente nula y por lo tanto constante.

(f) Debido a que el proceso de pérdida de energía por radiación de Hawking–Zeldovich se lleva acabo a presión constante, entonces la pérdida de calor es tal que $dQ = Mc_p dT$, en donde c_p representa el calor específico a presión constante. Justifica esta relación y muestra que

$$dT = -\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G} \frac{dM}{M^2}, \tag{26}$$

para obtener

$$c_p = -\frac{8\pi k_B G}{\hbar c} M. \tag{27}$$

Explica el por qué el calor específico es una cantidad negativa (hint: muestra que cuando M decrece, T aumenta).

(g) Si suponemos que el espectro de emisión es tipo cuerpo negro, entonces la pérdida de energía por unidad de tiempo por unidad de área (el flujo F) ocurre mediante la ley de Stephan–Boltzman, es decir,

$$F = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \sigma T^4, \tag{28}$$

en donde $\sigma := \pi^2 k_B^4 / 60\hbar^3 c^2$ es la constante de Stephan–Boltzman y U es la energía interna del agujero. Muestra con esto que la variación de la masa como función del tiempo está dada por

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\hbar c^4}{15360\,\pi\, G^2}\frac{1}{M^2}, \tag{29}$$

y por lo tanto el tiempo t que tarda un agujero de Schwarzschild en evaporarse está dado por

$$t = \frac{5120\,\pi\, G^2}{\hbar\, c^4} M^3 \tag{30}$$

Hoja de información†

Métrica de Robertson–Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\left\{dr^2 + \mathfrak{R}^2 \sin^2(r/\mathfrak{R}) d\Omega^2\right\}$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\left\{\frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 d\Omega^2\right\}, \tag{31}$$

Ecuaciones de Friedmann:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0. \tag{32}$$

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G a\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda a, \tag{33}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho a^2 - \frac{c^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{1}{3}\Lambda a^2. \tag{34}$$

Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{35}$$

Métrica de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist:

$$\begin{aligned} ds^2 =& \frac{(\Delta - a^2 \sin^2\theta) dt^2}{\Sigma} c^2 dt^2 - 2a \sin^2\theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} dt d\varphi - \\ & - \frac{(r^2 + a^2) - \Delta a^2 \sin^2\theta}{\Sigma} \sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2, \end{aligned} \tag{36}$$

en donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \tag{37}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2GMr/c^2. \tag{38}$$

† Puedes utilizar cualquier ecuación en esta página sin demostrarla.