Modelos Cosmológicos en Teorías Métricas de Gravitación

Vinculación con las observaciones

Luis Alberto Torres Andrade
<luisfciencias@gmail.com>
Facultad de Ciencias
Instituto de Astronomía
Universidad Nacional Autónoma
de México (UNAM)

Asesor: Dr. Sergio Mendoza

Curso INAOE

1 Teoría de Gravitación

Teoría de general de la relatividad. Ejemplo de una teoría métrica.

Acción

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4\mathbf{x} + \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4\mathbf{x} \tag{1}$$

Ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2}$$

- Variable de campo fundamental $g_{\mu\nu}$.
- Sector de curvatura.
- Sector de materia.
- Ecuaciones de segundo orden para la métrica.

2 Teorías Métricas de Gravitación

Consideradas extensiones de la teoría general de la relatividad

Acción

$$\mathcal{S}[g_{\mu\nu}] = \int f(R)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4\mathbf{x} + \int \mathcal{L}_M\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4\mathbf{x} \tag{3}$$

Ecuaciones de campo

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + \Box f'(R)g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{4}$$

- Variable de campo fundamental $g_{\mu\nu}$.
- $f(R)$ función arbitraria del escalar de curvatura.
- $f(R) = R - 2\Lambda$ recupera relatividad general.
- Sector de curvatura(extendido).
- Sector de materia.
- Ecuaciones de campo de cuarto orden para la métrica.

3 Modelo cosmológico en relatividad general

Homogeneidad e isotropía: compatibilidad con observaciones. Métrica de FRW.

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\kappa r^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right] \tag{5}$$

$a(t)$ factor de escala, engloba la dinámica cosmológica.

Ecuaciones de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{6}$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \tag{7}$$

4 Modelo cosmológico en gravedad métrica

Ecuaciones de campo

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + \Box f'(R)g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{8}$$

Aprovechamos experiencia previa con relatividad general, para escribir las ecuaciones en la forma ($f'(R) := F(t)$)

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\left[\frac{1}{F}T_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(f(R) - RF\right) - \Box F}{F}\right)g_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi G F}\nabla_\mu\nabla_\nu F\right] \tag{9}$$

Definimos un tensor de energía-momento vinculado con la curvatura

$$T^{(R)}_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G F}\left[\left(\frac{1}{2}\left(f(R) - RF\right) - \Box F\right)g_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu F\right] \tag{10}$$

Y con ello las ecuaciones de campo toman la forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\left[\frac{1}{F}T_{\mu\nu} + T^{(R)}_{\mu\nu}\right] \tag{11}$$

Punto importante: intentar vincular la curvatura como una contribución al sector de materia.

Principal aplicación: intentar modelar la energía oscura, sin necesidad de recurrir a materia exótica, pero enfatizando modificaciones a la teoría de gravitación.

Interpretación de fluido perfecto

$$T^{(R)\mu}{}_{\nu} = \mathrm{diag}(-\rho_R, p_R, p_R, p_R) \tag{12}$$

Ecuación de Friedmann modificada

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{\rho}{F(t)} + \rho_R\right] - \frac{\kappa}{a^2} \tag{13}$$

Modelo de gravedad en ley de potencias

$$f(R) = bR^n \tag{14}$$

En vacío ($\kappa = 0$)

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{(2n-1)(1-n)}{n-2}} \tag{15}$$

En presencia de materia ($\kappa = 0$)

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2n/3} \tag{16}$$

Ecuación de Friedmann

$$H(z) = H_0(1+z)^{\frac{3}{2n}} \tag{17}$$

Relación de aplanado en relatividad general

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \tag{18}$$

Relación de aplanado en gravedad métrica

$$\frac{\Omega_M}{F_0} + \Omega_R = 1 \tag{19}$$

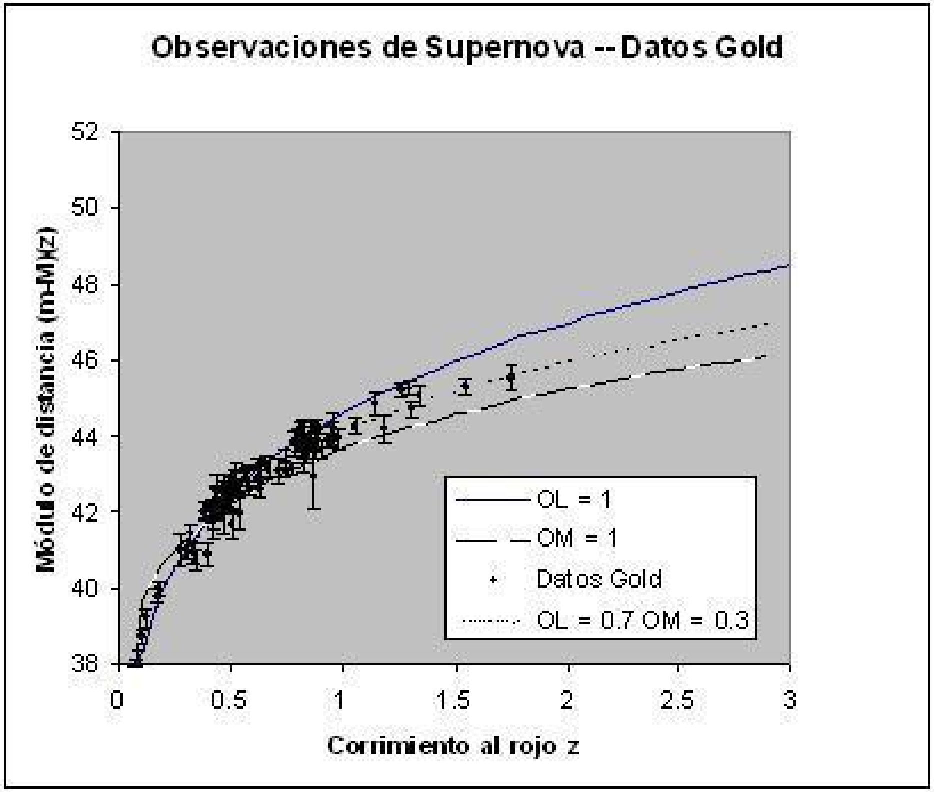
Dependencia en el exponente de curvatura

$$\Omega_R = \frac{n-1}{2n^2}\,(10n-3) \tag{20}$$

5 Observaciones de Supernova

Módelo compatible con las observaciones

$$\Omega_M \approx 0.3 \qquad \Omega_\Lambda \approx 0.7 \tag{21}$$



Relación distancia-luminosidad

$$H_0 d_{\mathcal{L}}(z;n) = \frac{2n}{3-2n}\left[(1+z) - (1+z)^{2-\frac{3}{2n}}\right] \tag{22}$$